PORTUGALIAE MATHEMATICA

ISSN 0032-5155

VOLUME 43

1985-1986

Edição da

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

PORTUGALIAE MATHEMATICA

Av. da República, 37-4.º

1000 LISBOA—PORTUGAL

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 43 — Fasc. 3 — 1985-1986

CONDITION POUR QUE LA PUISSANCE I^X DU TREILLIS COMPLET I SOIT ALGÉBRIQUE

A. ACHACHE
Univ. Claude Bernard, Lyon 1, Deptm. Mathématiques
43, Bd. du 11 Nov. 1918, 69622 — Villeurbanne Cedex — FRANCE

RESUME. On sait que, si X *est un ensemble quelconque et si* 2 *désigne le treillis complet* $\{0 < 1\}$, *la puissance* 2^X, *identifiable à l'ensemble des parties de* X, *est un treillis algébrique. On montre ici que, pour un treillis complet* I, *la puissance* I^X *est un treillis algébrique si et seulement si* I *l'est.*

Mots-clés. Treillis complets. Treillis algébriques. Compacité.

Préliminaires. Rappelons qu'un élément k du treillis complet I est dit *compact* si et seulement si, pour toute partie A de I, $(k \leqslant \bigvee A) \Rightarrow$ $\Rightarrow (k \leqslant \bigvee B$ pour une partie finie B de A). Notons K (I) l'ensemble des éléments compacts de I.

Rappelons aussi que l'on nomme treillis *algébrique* un treillis L complet où tout élément t vérifie $t = \bigvee \{k \in K(L) \mid k \leqslant t\}$.

Etant donnés un treillis complet I et un ensemble X, l'ensemble I^X, ordonné comme un produit cartésien, apparaît évidemment lui-même comme un treillis complet.

Lemme 1. Soient I un treillis complet et X un ensemble. Pour chaque couple $(x, i) \in X \times I$, définissons l'élément de I^X, noté x_i, par $x_i(y) = 0$ si $y \neq x$; $x_i(x) = i$.

Received January 17, 1985.

Dès lors, pour toute partie A de I, $x_{\vee A} = \bigvee_{a \in A} x_a$ et, pour tout $\alpha \in I^E$, $\alpha = \bigvee_{x \in E} x_{\alpha(x)}$.

Preuve. Soit $\gamma = \bigvee_{a \in A} x_a$. Pour $y \neq x$, $\gamma(y) = \bigvee_{a \in A} (x_a(y)) = 0$. Par ailleurs $\gamma(x) = \bigvee_{a \in A} (x_a(x)) = \bigvee_{a \in A} a = \vee A$. Donc $\gamma = x_{\vee A}$.

Soit $\beta = \bigvee_{x \in E} x_{\alpha(x)}$. On a, pour tout y de X:

$\beta(y) = \bigvee_{x \in E} (x_{\alpha(x)}(y)) = (y_{\alpha(y)})(y) = \alpha(y)$. Donc $\beta = \alpha$. ■

Lemme 2. Avec les hypothèses et les notations du lemme 1, x_i est compact si et seulement si i est compact.

Preuve. Supposons d'abord i compact. Soit F une partie de I^X telle que $x_i \leqslant \vee F$. On déduit $i = x_i(x) \leqslant \bigvee_{\alpha \in F} (\alpha(x))$. Donc, il existe une partie finie A de $\{\alpha(x) / \alpha \in F\}$ telle que $i \leqslant \vee A$. Mais alors, on peut trouver une partie finie G de F telle que $A = \{\alpha(x) / \alpha \in G\}$ et donc $i \leqslant \bigvee_{\alpha \in G} (\alpha(x))$. Par suite $x_i(x) \leqslant (\vee G)(x)$ et $x_i \leqslant \vee G$. Ainsi, x_i est un élément compact de I^X.

Inversement, supposons que x_i est un élément compact de I^X. Supposons la partie A de I telle que $i \leqslant \vee A$. Ceci s'écrit (lemme 1) $x_i \leqslant x_{\vee A} = \bigvee_{a \in A} x_a$. Comme x_i est compact, on peut trouver une partie finie B de A telle que $x_i \leqslant \bigvee_{a \in B} x_a$, d'où $i = x_i(x) \leqslant \bigvee_{a \in B} (x_a(x)) = \vee B$. ■

Theoreme. Soit I un treillis complet et soit X un ensemble. Pour que I^X soit un treillis complet algébrique, il faut et il suffit que I en soit un.

Preuve. Décidons de noter $\downarrow i$ l'ensemble des compacts de I qui minorent l'élément i de I (et $\downarrow \alpha$ l'ensemble des compacts de I^X qui minorent l'élément α de I^X).

Supposons pour commencer que I^X soit un treillis algébrique. Soit $(x, i) \in X \times I$. Les minorants de x_i sont les $(x_j)_{j \leqslant i}$. Les minorants compacts de x_i sont donc (lemme 2) les $(x_j)_{j \in \downarrow i}$. Comme I^X est algébrique, on a $x = \vee \{x_j / j \in \downarrow i\}$ et donc $i = x_i(x) = \vee \{x_j(x) / j \in \downarrow i\}$, soit $i = \vee \downarrow i$. Ainsi I est algébrique.

Inversement, supposons que I soit un treillis algébrique. Pour $\alpha \in I^X$ et $x \in X$, on a (puisque I est algébrique)

$$x_{\alpha(x)} = x_{\vee \downarrow (\alpha(x))} = \vee \{x_a / a \in \downarrow (\alpha(x))\} \text{ (lemme 1).}$$

Par suite (lemme 1),

$$\alpha = \bigvee_{x \in E} x_{\alpha(x)} = \bigvee_{x \in E} (\vee M_x) \text{ où } M_x = \{x_a / a \in \downarrow (\alpha(x))\}.$$

On obtient alors $\alpha = \vee (\bigcup_{x \in E} M_x)$. Si maintenant μ est un elément de M_x, c'est que $\mu = x_a$, pour un $a \in \downarrow (\alpha(x))$; μ est donc un minorant compact de α: $\mu \in \downarrow \alpha$. Ainsi $\bigcup_{x \in E} M_x \subset \downarrow \alpha$ et donc $\alpha = \vee (\bigcup_{x \in E} M_x) \leqslant \vee \downarrow \alpha$, d'où $\alpha = \vee \downarrow \alpha$. Ainsi I^X est un treillis algébrique. ■

Par exemple, si L est un treillis fini, c'est aussi évidemment un treillis complet algébrique, donc L^X est un treillis algébrique pour tout X. Par contre, l'intervalle réelle $J = [0, 1]$ n'étant pas algébrique, J^X n'est jamais algébrique.

En conclusion, cette étude peut servir à l'analyse de l'algébricité de certaines situations en mathématique floue.

REFERENCES

1. A. Achache — *Parties floues compactes d'un ensemble*, Portugaliae Math. 42 (1983/84), 311-315.
2. M. W. Mislove — *An introd. to the cont. latt.*, Ordered sets 379-406, Reidel (Coll. Banff, 1981) I. Rival, Ed.