

# PORTUGALIAE MATHEMATICA

Revista fundada

por

ANTÓNIO MONTEIRO

Corpo Directivo

A. MONTEIRO, HUGO B. RIBEIRO, JOSÉ S. PAULO, M. ZALUAR NUNES E RUY LUÍS GOMES

VOLUME 5

1 9 4 6

Edição de «Gazeta de Matemática, Lda.»

LISBOA — PORTUGAL

Publicação subsidiada pela

Junta de Investigação Matemática e Sociedade Portuguesa de Matemática

## SOBRE LOS CUERPOS CONVEXOS DE ANCHURA CONSTANTE EN $E_n$

por L. A. SANTALÓ (ROSARIO, ARGENTINA)

(Recibido em 1946, Dezembro)

**O. RESUMEN.** Se sabe que entre la longitud  $L$  y la anchura  $a$  de una figura convexa plana de anchura constante, existe la relación

$$L = \pi a.$$

Analogamente, entre el volumen  $V$ , el área  $F$  y la integral de la curvatura media  $M$  de un cuerpo convexo del espacio de anchura constante  $a$ , existen las relaciones

$$\begin{aligned} 2V - aF + 2\pi a^3/3 &= 0 \\ M - 2\pi a &= 0. \end{aligned}$$

El objeto de esta nota es generalizar estas relaciones, obteniendo todas las existentes, a los cuerpos convexos de anchura constante del espacio euclidiano  $n$ -dimensional. Estas relaciones son las (4·6) y (4·7) del n.º 4.

**1. DEFINICIONES Y NOTACIONES.** En toda esta nota seguiremos las notaciones del libro de Bonnesen-Fenchel «*Theorie der konvexen Körper*», Berlin 1934. Vamos a recordar rapidamente las definiciones que necesitaremos.

Sea  $E_n$  el espacio euclidiano  $n$ -dimensional. Se llama *cuerpo convexo* de  $E_n$  a todo conjunto convexo de puntos que sea limitado y cerrado y tenga puntos interiores.

Los puntos del contorno de un cuerpo convexo  $C$  constituyen una hipersuperficie convexa que, por brevedad, representaremos también por  $C$ .

Se llama *hiperplano de apoyo* (*Stützebene*) de un cuerpo convexo  $C$  a todo hiperplano que tiene punto común con  $C$  sin atravesarlo, es decir, a todo hiperplano que tiene punto común con  $C$  pero deja a todo este cuerpo en un mismo semiespacio de los dos en que divide a  $E_n$ .

Sea  $O$  un punto interior a  $C$ , que tomaremos como origen de coordenadas. Una dirección  $u = u(u_1, u_2, \dots, u_n)$  por  $O$  quedará determinada por sus cosenos directores  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , ligados por la relación  $u^2 = \sum u_i^2 = 1$ . Normalmente a la dirección  $u$  hay un solo hiperplano de apoyo; sea  $\Pi(u) = H(u_1, u_2, \dots, u_n)$  la distancia de  $O$  a este hiperplano. La función

$$H = H(u) \quad (1.1)$$

se llama la *función de apoyo* de  $C$ .

Se llama cuerpo convexo *paralelo exterior* a  $C$  a distancia  $h$ , al cuerpo convexo  $C(h)$  cuya función de apoyo es

$$\Pi_h(u) = \Pi(u) + h \quad (1.2)$$

siendo  $h$  una constante positiva.

Se demuestra (Bonnesen-Fenchel, pág. 49) que el volumen  $V(h)$  de  $C(h)$  está dado por la siguiente expresión

$$V(h) = \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} h^\nu W_\nu \quad (1.3)$$

donde las  $W_\nu$  son unos invariantes del cuerpo convexo  $C$ .

Si la hypersuperficie que limita  $C$  tiene en cada punto radios principales de curvatura finitos, los invariantes  $W_\nu$  se expresan de la siguiente manera (Bonnesen-Fenchel, pág. 63).

Sea  $\{R_1, R_2, \dots, R_\nu\}$  la función simétrica elemental de orden  $\nu$  de los radios principales de curvatura  $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$  y representemos por  $d\omega$  el elemento de área de la esfera de radio unidad correspondiente a la dirección cuyo plano de apoyo normal toca a  $C$  en el punto donde los radios principales de curvatura son los  $R_i$ . Con estas notaciones  $W_\nu$  está dado por

$$W_\nu = \frac{1}{n \binom{n-1}{n-\nu-1}} \int_E H \{R_1, R_2, \dots, R_{n-\nu-1}\} d\omega, \quad (1.4)$$

donde la integración está extendida a toda la superficie de la esfera unidad  $n$ -dimensional.

Como casos particulares de las  $W_\nu$  se tienen :

$W_0$  es igual al volumen  $V$  de  $C$ , o sea,

$$W_0 = V; \tag{1.5}$$

$nW_1$  es igual al área  $F$  de  $C$  (o bien a la longitud  $L$  para  $n=2$ ),  
o sea,

$$W_1 = F/n, \tag{1.6}$$

$nW_2$  es igual a la integral de la curvatura media de  $C$ , o sea,

$$W_2 = M/n \tag{1.7}$$

siendo

$$M = \frac{1}{n-1} \int \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_{n-1}} \right) ds$$

donde  $ds$  es el elemento de área de  $C$  y la integración está extendida a toda la superficie de  $C$ ;

$W_n$  es igual al volumen de la esfera unidad  $n$ -dimensional, o sea :

$$W_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}. \tag{1.8}$$

**2. RELACIONES ENTRE LAS  $W_\nu$  PARA CUERPOS CONVEXOS PARALELOS.**  
La fórmula (1.3) nos dice que  $V(h)$  es un polinomio en  $h$  de grado  $n$ . Por tanto, aplicando el desarrollo de Taylor para polinomios vale la fórmula

$$V(h) = \sum_{\nu=0}^n \frac{h^\nu}{\nu!} \left( \frac{d^\nu V(h)}{dh^\nu} \right)_{h=0}. \tag{2.1}$$

Comparando con (1.3) se deduce

$$W_\nu = \frac{1}{\nu! \binom{n}{\nu}} \left( \frac{d^\nu V(h)}{dh^\nu} \right) = \tag{2.2}$$

Esta nueva expresión para las  $W_\nu$  tiene la ventaja, sobre las (1.4), de no exigir la existencia o finitud de los radios principales de curvatura  $R_i$ .

En vez del cuerpo convexo  $C$ , consideremos el paralelo exterior  $C(h)$ : para él debe valer también la misma fórmula (2.2). Por tanto, llamando  $W_\nu(h)$  al valor del invariante  $W_\nu$  para el cuerpo convexo

$C(h)$ , será

$$W_\nu(h) = \frac{1}{\nu! \binom{n}{\nu}} \frac{d^\nu V(h)}{dh^\nu}. \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta (1.3) esta expresión nos da

$$W_\nu(h) = \sum_{i=0}^{n-\nu} \binom{n-\nu}{i} h^i W_{\nu+i}. \quad (2.4)$$

Esta relación, que para  $\nu=0$  coincide con (1.3), sirve para calcular las  $W_\nu(h)$  de  $C(h)$  en función de las  $W_{\nu+i}$  de  $C$ .

**3. CUERPOS CONVEXOS PARALELOS INTERIORES DE OTRO DADO.** Sea el cuerpo convexo  $C$  cuya función de apoyo es  $H=H(u)$ . Consideremos los infinitos hiperplanos cuya distancia al origen  $O$  vale, para cada dirección  $u$ ,

$$H(u) = H(u) - h \quad (3.1)$$

siendo  $h$  una constante positiva.

La envolvente de todos estos hiperplanos será una hipersuperficie  $C(-h)$  que tiene en cada punto la misma normal que la hipersuperficie de  $C$  en el punto correspondiente. Por consiguiente, a las líneas de curvatura de  $C$  corresponderán las líneas de curvatura de  $C(-h)$  y los radios principales de curvatura  $R_i^*$  de  $C(-h)$  estarán ligados con los de  $C$  por la relación

$$R_i^* = R_i - h \quad (i=1, 2, \dots, n-1). \quad (3.2)$$

Por tanto, la inversa de la curvatura total de Gauss de  $C(-h)$  valdrá:

$$K(-h) = (R_1 - h)(R_2 - h) \dots (R_{n-1} - h). \quad (3.3)$$

Para que esta curvatura tenga signo constante y por tanto  $C(-h)$  sea la hipersuperficie de un cuerpo convexo, es suficiente que sea

$$h \leq \min R_i \quad \text{o bien} \quad h \geq \max R_i. \quad (3.4)$$

Si  $h$  cumple una de estas condiciones, la hipersuperficie  $C(-h)$  será la hipersuperficie de un cuerpo convexo, que indicaremos también por  $C(-h)$ . Este  $C(-h)$  se llamará el cuerpo convexo *paralelo interior* de  $C$  a distancia  $h$ .

Siendo  $C(-h)$  también un cuerpo convexo, para él valen las relaciones anteriores (1·3) y (2·4), con solo sustituir en ellas  $h$  por  $-h$ . Basta, en efecto, sustituir en (1·4)  $H$  por  $H-h$  y los  $R_i$  por  $R_i-h$  y desarrollar según las potencias de  $h$ .

**4. RELACIONES ENTRE LOS INVARIANTES  $W_\nu$  DE LOS CUERPOS CONVEXOS DE ANCHURA CONSTANTE.** Sea  $H=H(u)$  la función de apoyo de un cuerpo convexo  $C$ . Si  $-u$  indica la dirección opuesta a  $u$ , los hiperplanos de apoyo normales a esta dirección serán paralelos y la distancia entre ellos será

$$a(u)=H(u)+H(-u). \tag{4.1}$$

$a(u)$  se llama la *anchura* de  $C$  según la dirección  $u$ .

Cuando  $a(u)=\text{constante}$ , se dice que  $C$  es un *cuerpo convexo de anchura constante*. Estos cuerpos, que para  $n=2$  (caso del plano) se llaman *orbiformes* y para  $n=3$  (caso del espacio) se llaman *esferiformes*, tienen notables propiedades (Bonnesen-Fenchel, § 15).

De la definición se deduce que todo cuerpo convexo de anchura constante  $a$  es paralelo interior de si mismo a distancia  $a$ , es decir,  $C(-a)=C(a)$ . En consecuencia los invariantes  $W_\nu(-a)$  correspondientes a  $C(-a)$  deben ser iguales a los  $W_\nu$  correspondientes de  $C$ ; únicamente puede haber cambiado el signo. Para ver esta diferencia de signo observemos que suponiendo  $H$  y los  $R_i$  positivos, los  $W_\nu$  según (1·4) también lo serán; en cambio los  $W_\nu(-a)$  tendrán el signo que resulte al sustituir en (1·4)  $H-a$  y  $R_i-a$  en lugar de  $H$  y  $R_i$ . Se sabe (Bonnesen-Fenchel, pág. 128) que para un cuerpo convexo de anchura constante los radios principales de curvatura correspondientes a las líneas de curvatura homólogas en dos puntos opuestos, tienen su suma igual a la anchura  $a$ ; por consiguiente es  $a \geq R_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ) y como también  $a \geq H$ , de (1·4) resulta que el signo de  $W_\nu(-a)$  es el de  $(-1)^{n-\nu}$ . Por tanto

$$W_\nu(-a)=(-1)^{n-\nu}W_\nu \tag{4.2}$$

Aplicando esta igualdad a (2·4) para  $h=-a$ , resulta que *entre los invariantes  $W_\nu$  de los cuerpos convexos de anchura constante a de  $E_n$  existen las relaciones*

$$W_\nu = \sum_{i=0}^{n-\nu} (-1)^{n-\nu+i} \binom{n-\nu}{i} a^i W_{\nu+i} \tag{4.3}$$

para  $\nu=0, 1, 2, \dots, n$ .

Estas  $n+1$  relaciones non son independientes. Para verlo, escribamos detalladamente (4.3) para  $\nu=n, n-1, n-2, \dots, n-\nu$ , siendo  $\nu$  par. Resultan las relaciones:

$$\begin{aligned}
 0) & W_n = W_n \\
 1) & W_{n-1} = \alpha W_n - W_{n-1} \\
 2) & W_{n-2} = \alpha^2 W_n - \binom{2}{1} \alpha W_{n-1} + W_{n-2} \\
 3) & W_{n-3} = \alpha^3 W_n - \binom{3}{1} \alpha^2 W_{n-1} + \binom{3}{2} \alpha W_{n-2} - W_{n-3} \\
 & \dots \\
 \nu) & W_{n-\nu} = \alpha^\nu W_n - \binom{\nu}{1} \alpha^{\nu-1} W_{n-1} + \binom{\nu}{2} \alpha^{\nu-2} W_{n-2} - \dots + W_{n-\nu}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Vamos a demostrar que, en la hipótesis dicha de ser  $\nu$  un número par, la última ecuación escrita es una consecuencia de las anteriores. En efecto, multipliquemos la ecuación 0) por  $\alpha^\nu$ , la ecuación 1) por  $-\binom{\nu}{1} \alpha^{\nu-1}$ , y, en general, la ecuación  $i$ ) por  $(-1)^i \binom{\nu}{i} \alpha^{\nu-i}$ . Sumando luego miembro a miembro queda

$$\sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \binom{\nu}{i} \alpha^{\nu-i} W_{n-i} = \sum_{j=0}^{\nu} \left( \sum_{i=j}^{\nu} (-1)^i \binom{\nu}{i} \binom{i}{j} \right) (-1)^j \alpha^{\nu-j} W_{n-j}. \tag{4.5}$$

Pero según una fórmula conocida<sup>1</sup>, es

$$\sum_{i=j}^{\nu} (-1)^i \binom{\nu}{i} \binom{i}{j} = \begin{cases} 0 & \text{si } \nu \neq j \\ (-1)^j & \text{si } \nu = j, \end{cases}$$

y como el primer miembro de (4.5) según la ecuación  $\nu$ ) de (4.4) es igual a  $W_{n-\nu}$ , resulta la identidad  $W_{n-\nu} = W_{n-\nu}$ .

Esto nos dice que de las  $n+1$  relaciones (4.3) para  $\nu=0, 1, 2, \dots, n$  se pueden suprimir todas las correspondientes a  $n-\nu$  par, por ser ellas consecuencia de las que les siguen.

En definitiva queda:

*Entre los invariantes  $W_\nu$  de un cuerpo convexo de anchura constante a del espacio euclidiano de  $n$  dimensiones, existen las siguientes relaciones independientes:*

<sup>1</sup> Ver E. Netto, «Lehrbuch der Combinatorik», Leipzig und Berlin, 1927, pág. 255, fórmula (43).

a) Si  $n=2m$ :

$$2W_{2\nu-1} + \sum_{i=1}^{n-2\nu+1} (-1)^i \binom{n-2\nu+1}{i} a^i W_{2\nu-1+i} = 0 \quad (4.6)$$

para  $\nu=1, 2, 3, \dots, m$ .

b) Si  $n=2m+1$ :

$$2W_{2\nu} + \sum_{i=1}^{n-2\nu} (-1)^i \binom{n-2\nu}{i} a^i W_{2\nu+i} = 0 \quad (4.7)$$

para  $\nu=0, 1, 2, 3, \dots, m$ .

5. EJEMPLOS. 1. Para el plano  $n=2$ , la relación única es

$$2W_1 - aW_2 = 0,$$

o sea, siendo  $2W_1=L$ ,  $W_2=\pi$ ,

$$L - \pi a = 0$$

que es la relación conocida entre la longitud  $L$  y la anchura  $a$  de las figuras planas convexas de anchura constante (Bonnesen-Fenchel, pág. 131).

2. Para el espacio ordinario,  $n=3$ , las relaciones son

$$2W_0 - 3aW_1 + 3a^2W_2 - a^3W_3 = 0; \quad 2W_2 - aW_3 = 0$$

que, según (1.5), (1.6), (1.7) y (1.8) se pueden escribir

$$2V - aF + \frac{2}{3}\pi a^3 = 0; \quad M - 2\pi a = 0.$$

3. Para  $n=4$  se tiene

$$2W_1 - 3aW_2 + 3a^2W_3 - a^3W_4 = 0; \quad 2W_3 - aW_4 = 0,$$

o bien, según (1.5), (1.6), (1.7) y (1.8),

$$2F - 3aM + a^3\pi^2 = 0; \quad 4W_3 - a\pi^2 = 0.$$