PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 11
1952

Publicação subsidiada por
Publication subventionnée par   Publication sponsored by
JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA e SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Edição de
«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua Serpa Pinto, 17, 4.º-E.
LISBOA (PORTUGAL)

HERMANN & C.ie, Éditeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5ième)

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 11 — Fasc. 2 — 1952

SOPRA UN TEOREMA DI H. LEBESGUE *

DI GIOVANNI AQUARO

Introduzione. Come è ben noto, il teorema de LEBESGUE nella teoria della derivazione delle funzioni di insieme, in un primo momento è stato dimostrato con due diversi procedimenti: l'uno che trae origine dal LEBESGUE stesso e che si fonda su un teorema di copertura di VITALI (überdeckungssätze degli autori tedeschi); l'altro trae origine da C. DE LA VALLÉE POUSSIN che, pur evitando il teorema di VITALI, fa ricorso alla integrazione supposta preventivamente sviluppata.

Per molti motivi si è mostrata opportuna una esposizione del suaccennato teorema che prescinda, come quella del LEBESGUE, dalla teoria dell'integrazione e che non richieda, come quella del DE LA VALLÉE POUSSIN l'uso del teorema di copertura sopra detto.

A tal riguardo per quanto concerne le funzioni di una variabile reale, vanno segnalati i procedimenti di L. TONELLI (*Calcolo della Variazioni* — vol. I, Zanichelli — 1921) e di F. RIESZ (*Sur l'existence de la derivée des fonctions d'une variable réelle* ecc. — Verhandlungen des internationalen Mathematiker Kongress — Zurich — 1932); ma entrambi essi non sembrano applicabili alle funzioni di insieme più complicate.

Nella presente nota si indica una dimostrazione del detto teorema che soddisfa ai requisiti voluti.

1. Per comodità del lettore richiamiamo alcune nozioni delle quali faremo uso frequente nela presente Nota.

Seguendo C. DE LA VALLÉE POUSSIN chiameremo *reticolato* di $S_{(r)}$ (grillage) ogni successione $\mathcal{G}$ di quadrati aperti superiormente (1), o più

---

* Ricevuto in Aprile 1952.

(1) Chiamiamo intervallo di $S_{(r)}$ ogni dominio rettangolare di tale spazio, mentre con *quadrato* intendiamo un intervallo avente dimensioni uguali il cui valor comune è detto *lato del quadrato*. Gli intervalli ed i quadrati aperti superiormente sono quelli i cui intervalli proiezione sugli assi coordinati non contengono il loro estremo superiore.

brevemente, di maglie $\{\Delta_k\}$ a due a due prive di punti comuni, tutte di latto uguale e la cui somma coincida con $S_{(r)}$.

Una *intrecciatura* (reseau) è una successione di reticolati $\{\mathcal{G}_n\}$ tale che una maglia del generico $\mathcal{G}_n$ risulti somma, p. es, di 3^r maglie di $\mathcal{G}_{n+1}$. Detto d_n il lato comune delle maglie di $\mathcal{G}_n$ risulta

$$d_n > d_{n+1} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} d_n = 0 .$$

Il De la Vallée Poussin ha notato che una qualunque intrecciatura di $S_{(r)}$ può essere considerata come facente parte di un *sistema coniugato* di intrecciature, cioè di certe 2^r intrecciature tra le cui maglie di ciascun reticolato di ugual indice, intercorre una relazione di coniugio che qui non occorre specificare (per i dettagli rimandiamo a C. De la Vallée Poussin: *Intégrales de Lebesgue ecc.* Gauthier — Villars — Parigi 1916; pag. 61).

Si dimostra (cfr. C. De la Vallée Poussin op. cit. pag. 65) che:

I — *Ogni quadrato di* $S_{(r)}$ *di lato* d *è interamente contenuto in una maglia di lato minore di* 6 d *di una, almeno, delle intrecciature di un fissato sistema coniugato.*

2. Nel seguito intenderemo come famiglia elementare di insiemi ogni famiglia contenente gli intervalli aperti superiormente di $S_{(r)}$.

Ed allora definita nella famiglia elementare $\{U\}$ la funzione di insieme $\alpha(U)$, prefissata una qualunque intrecciatura ϑ, scegliamo in $S_{(r)}$ un punto x e, denotata con $\Delta_x^{(n)}$ la maglia del reticolato $\mathcal{G}_n$ di ϑ che contiene il punto x stesso, poniamo:

$$f_n(x) = \frac{\alpha(\Delta_x^{(n)})}{mis\, \Delta_x^{(n)}} .$$

Ancora una volta seguiamo il De la Vallée Poussin chiamando minima e massima derivata di $\alpha(U)$ nel punto x sulla intrecciatura ϑ, rispettivamente il minimo ed il massimo limite della successione $\{f_n(x)\}$. Se in x la detta successione è convergente, la $\alpha(U)$ si dice derivabile in x sopra la intrecciatura ϑ ed il limite di $\{f_n(x)\}$ si chiama derivata di $\alpha(U)$ in x su ϑ.

Dato un qualunque numero reale a denotiamo con $I''_a(\alpha, \vartheta)$ ed $I'_a(\alpha, \vartheta)$ rispettivamente gli insiemi dei punti di $S_{(r)}$ in corrispondenza dei quali si ha:

$$a < \lim_{n\to\infty}{}'' f_n(x) \leq +\infty , \qquad -\infty \leq \lim_{n\to\infty}{}' f_n(x) < a$$

Agevolmente si riconosce che $I''_a(\alpha, \vartheta)$ e $I'_a(\alpha, \vartheta)$ sono insiemi di BOREL.

Indicato poi con $I''_{+\infty}(\alpha, \vartheta)$ e $I'_{-\infty}(\alpha, \vartheta)$ l'insieme dei punti di $S_{(r)}$ in cui è rispettivamente:

$$\lim_{n\to\infty}{}'' f_n(x) = +\infty, \qquad \lim_{n\to\infty}{}' f_n(x) = -\infty$$

è facile convincersi che è:

$$I''_{+\infty}(\alpha, \vartheta) = \prod_{n=1}^{\infty} I''_n(\alpha, \vartheta), \qquad I'_{-\infty}(\alpha, \vartheta) = \prod_{n=1}^{\infty} I'_{-n}(\alpha, \vartheta)$$

e che tali insiemi sono di BOREL.

É di grandissima importanza per il seguito ricordare un altro teorema già indicato con qualche piccola variante dal DE LA VALLEE POUSSIN (op. cit. pag. 63).

II — *Se* $\alpha(U)$ *è una qualunque funzione definita nella famiglia elementare* $\{U\}$, *denotato con* I *un qualunque insieme limitato contenuto in* $I''_a(\alpha, \vartheta)$ *e con* H *un arbitrario insieme aperto contenente* I, *esiste una successione* $\{\Delta_n\}$ *(eventualmente finita) di maglie di una prefissata intrecciatura* ϑ, *a due a due prive di punti comuni, tutte contenute in* H, *tali che sia:*

$$I \prec \sum_k \Delta_k, \qquad \frac{\alpha(\Delta_k)}{mis\, \Delta_k} > a.$$

Rileviamo che la dimostrazione del teorema enunciato è stata basata dal citato autore esclusivamente sui concetti e sulle definizioni fin qui esposte.

Ciò premesso, diremo che $\alpha(U)$ definita nella famiglia elementare di insiemi $\{U\}$ è elementarmente additiva se risulta;

$$\alpha(K) = \alpha(K_1) + \alpha(K_2)$$

ogni qual volta K, K_1, K_2 siano intervalli aperti superiormente, e non abbiano punti comuni e risulti:

$$K = K_1 + K_2.$$

É facile convincersi che:

III — *Se la funzione elementarmente additiva e non negativa* $p(U)$ *è definita nella famiglia elementare* $\{U\}$ *sussiste la relazione:*

$$p(K) \geq \sum_{n=1}^{\infty} p(K_n)$$

ogni qual volta $K_1, K_2, \cdots, K_n, \cdots$ *sono intervalli aperti superiormente privi a due a due di punti comuni contenuti nell'intervallo* K.

Sussiste il teorema:

IV — *Per ogni* p(U) *elementarmente additiva e non negativa nella famiglia elementare* {U}, *per ogni fissata intrecciatura* $\mathfrak{J}$, *indicato con* K *un intervallo aperto superiormente di* $S_{(r)}$, *scelto comunque l'insieme lebesguiano* (¹) J *in* K · $I''_a(p, \mathfrak{J})$, *si ha*

$$p(K) > a \operatorname{mis} J$$

Dimostrazione. Considerato l'insieme lebesguiano $J^* = J - \mathcal{F}K$ essendo $\mathcal{F}K$ la frontiera (di misura nulla) di K, basterà dimostrare che è:

$$(1) \qquad p(K) > a \, mis \, J^*.$$

L'insieme J^* è contenuto simultaneamente in $K - \mathcal{F}K$ e in $I''_a(p, \mathfrak{J})$, onde per il teor. II, si può affermare l'esistenza della successione di maglie $\{\Delta_n\}$ di $\mathfrak{J}$ contenute tutte in $K - \mathcal{F}K$ ed a due a due prive di punti comuni per le quali è:

$$J^* \prec \sum_n \Delta_n \prec K \qquad \frac{p(\Delta_n)}{mis \, \Delta_n} > a .$$

Richiamato il teor. III, si conclude:

$$a \, mis \, J^* \leqq a \sum_n mis \, \Delta_n \leqq \sum_n p(\Delta_n) \leqq p(K) .$$

Sussiste la (1) ed il teorema è dimostrato.
Deduciamo che:

V — *Comunque si prefissi una* p(U) *elementarmente additiva e non negativa nella famiglia elementare* {U} *si ha:*

$$\operatorname{mis} I''_{+\infty}(p, \mathfrak{J}) = 0$$

per ogni intrecciatura $\mathfrak{J}$ *di* $S_{(r)}$

Dimonstrazione. Considerato un qualunque intervallo T di $S_{(r)}$ denotiamo con K_T l'intervallo aperto superiormente avente i medesimi punti estremi di T. Come è ovvio sussistono le disuguaglianze:

(¹) Uniformandoci alla terminologia di M. Picone — *Teoria Moderna della Integrazione delle funzioni* — Pisa — 1946, diciamo lebesguiano ogni insieme di punti misurabile secondo Lebesgue.

$$0 \leqq mis\,[\mathrm{T} \cdot \mathrm{I}''_{+\infty}(p\,,\vartheta)] = mis\,[\mathrm{K_T} \cdot \mathrm{I}''_{+\infty}(p\,,\vartheta)] \leqq mis\,[\mathrm{K_T} \cdot \mathrm{I}''_{n}(p\,,\vartheta)]$$

per ogni intero positivo n. Da esse, richiamato il teorema precedente, consegue:

$$n\, mis\,[\mathrm{T} \cdot \mathrm{I}''_{+\infty}(p\,,\vartheta)] \leqq n\, mis\,[\mathrm{K_T} \cdot \mathrm{I}''_{n}(p\,,\vartheta)] < p(\mathrm{K_T}),$$

ciò che, per l'arbitrarietà di n e di T, implica in primo luogo:

$$mis\,[\mathrm{T} \cdot \mathrm{I}''_{+\infty}(p\,,\vartheta)] = 0$$

e poscia:

$$mis\, \mathrm{I}''_{+\infty}(p\,,\vartheta) = 0 \qquad \text{c. d. d.}$$

Siamo ormai in grado di dimostrare il seguente teorema sul quale poggiano tutte le altre nostre deduzioni.

VI — *Ogni funzione* p(U) *elementarmente additiva e non negativa nella famiglia elementare* $\{\mathrm{U}\}$ *è derivabile su una qualunque intrecciatura* ϑ *in tutti i punti di* $\mathrm{S}_{(r)}$ *esclusi, al più, quelli dell'insieme* $\mathrm{N}(\mathrm{p}\,,\vartheta)$ *di misura nulla.*

Dimostrazione. Poichè è $p(\mathrm{U}) \geqq 0$ le sue derivate su ϑ sono entrambe finite e non negative in $\mathrm{S}_{(r)} - \mathrm{I}''_{+\infty}(p\,,\vartheta)$. Per $x \prec \mathrm{S}_{(r)} - \mathrm{I}''_{+\infty}(p\,,\vartheta)$ denotiamo con $\mathfrak{D}'p(x)_\vartheta$ e $\mathfrak{D}''p(x)_\vartheta$ rispettivamente la minima e la massima derivata di $p(\mathrm{U})$ in x su ϑ.

Sia I l'insieme dei punti di $\mathrm{S}_{(r)} - \mathrm{I}''_{+\infty}(p\,,\vartheta)$ nei quali $p(\mathrm{U})$ non è derivabile. Deve essere

$$\mathrm{I} = \sum_{hk}^{1,\infty} \mathrm{I}_{hk}$$

avendo indicato con I_{hk} l'insieme dei punti di $\mathrm{S}_{(r)} - \mathrm{I}''_{+\infty}(p\,,\vartheta)$ nei quali è simultaneamente $\mathfrak{D}'p(x)_\vartheta < \dfrac{h}{k} < \dfrac{h+1}{k} < \mathfrak{D}''p(x)_\vartheta$. Poichè ciascun I_{hk} è lebesguiano altrettanto accade di I.

Dobbiamo dimostrare che è $mis\,\mathrm{I}=0$. Supponiamo al contrario che sia $mis\,\mathrm{I}>0$. Esiste allora almeno una coppia di interi positivi $m_0\,, n_0$ in corrispondenza dei quali si ha:

$$mis\, \mathrm{I}_{m_0 n_0} > 0\,.$$

Perchè ciò accada, occorre che esista l'insieme lebesguiano e limitado J contenuto in $\mathrm{I}_{m_0 n_0}$ per cui sia:

$$mis\, \mathrm{J} > 0\,.$$

Poichè J è lebesguiano e limitato esiste l'insieme aperto e limitato $\mathrm{H} \succ \mathrm{J}$ per cui è:

$$mis\,\mathrm{H} < mis\,\mathrm{J} + \varepsilon\,.$$

D'altro canto, poichè per $x \prec \mathrm{J}$ è $\mathcal{D}' p(x)_{\mathfrak{I}} < \dfrac{m_0}{n_0}$, il teor. II fornisce la successione (eventualmente finita) di maglie $\{\Delta_n\}$ della intrecciatura $\mathfrak{I}$ a due a due prive dei punti comuni e tutte contenute in H per le quali risulta:

$$\mathrm{J} \prec \sum_k \Delta_k \prec \mathrm{H} \qquad \frac{p(\Delta_k)}{mis\,\Delta_k} > \frac{m_0}{n_0}\,.$$

Se ne deduce:

(2) $$\sum_k p(\Delta_k) < \frac{m_0}{n_0} \sum_k mis\,\Delta_k \leqq \frac{m_0}{n_0}\, mis\,\mathrm{H} \leqq \frac{m_0}{n_0}(mis\,\mathrm{J} + \varepsilon)\,.$$

Inoltre per essere $\mathrm{J} = \mathrm{J} \cdot \sum_k \Delta_k = \sum_k \mathrm{J} \cdot \Delta_k$ deve essere necessariamente:

$$mis\,\mathrm{J} = \sum_k mis\,\mathrm{J} \cdot \Delta_k$$

e quindi è possibile determinare un opportuno intero positivo n tale che sia:

(3) $$mis\,\mathrm{J} - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} mis\,.$$

Poichè è $\mathrm{J} \prec \mathrm{I}''_{\frac{m_0+1}{n_0}}$, si deduce, a causa del teor. IV:

$$p(\Delta_k) > \frac{m_0+1}{n_0}\, mis\,\Delta_k\, \mathrm{I}''_{\frac{m_0+1}{n_0}}(p\,,\mathfrak{I}) \geqq \frac{m_0+1}{n_0}\, mis\,\mathrm{J} \cdot \Delta_k$$

e per ciò richiamata la (3)

$$\sum_{k=1}^{n} p(\Delta_k) > \frac{m_0+1}{n_0} \sum_{k=1}^{n} mis\,\mathrm{J} \cdot \Delta_k > \frac{m_0+1}{n_0}(mis\,\mathrm{J} - \varepsilon)\,.$$

Per essere $\sum_{k=1}^{n} p(\Delta_k) \leqq \sum_k p(\Delta_k)$, l'ultima relazione confrontata con la (2) fornisce:

$$\frac{m_0+1}{n_0}(mis\,\mathrm{J} - \varepsilon) < \frac{m_0}{n_0}(mis\,\mathrm{J} + \varepsilon)\,,$$

$$0 \leqq mis\,\mathrm{J} \leqq (2\,m_0 + 1)\,\varepsilon$$

ed in fine, per l'arbitrarietà di ε, $mis\,\mathrm{J} = 0$. Se si vuole evitare l'assurdo bisogna supporre dunque $mis\,\mathrm{I} = 0$ c. d. d.

3. Se U è un qualunque insieme limitato di $S_{(r)}$ ed x un punto di tale spazio, nel seguito denoteremo sempre con $Q(x, U)$ il minimo quadrato di centro x contenente U, cioè il quadrato di minimo lato avente centro x e contenente U.

Con H. Lebesgue diremo che la famiglia di insiemi $\mathcal{R}_x$ è regolare nel punto x con parametro di regolarità λ, se le seguenti condizioni sono verificate:

1) Tutti gli insiemi di $\mathcal{R}_x$ sono lebesguiani e limitati.

2) Scelto comunque un numero $\delta>0$ esiste un insieme U_δ in $\mathcal{R}_x$ per cui:

$$mis\, U_\delta < \delta$$

3) Comunque si fissi l'insieme U in $\mathcal{R}_x$ si ha

$$\frac{mis\, Q(x, U)}{mis\, U} \leqq \lambda$$

con λ costante positiva indipendente da U. Oltre a λ ovviamente risulta parametro di regolarità di $\mathcal{R}_x$ ogni numero $\lambda' > \lambda$.

É facile convincersi che ad ogni punto x di $S_{(r)}$ può associarsi almeno una famiglia di insiemi regolare in esso: basta considerare i quadrati di $S_{(r)}$ che contengono il punto x; essi individuano una famiglia regolare in x con parametro di regularità 2^r.

Supponiamo ora che la funzione di insieme $\alpha(U)$ sia definita al variare di U in una famiglia $\{U\}$ contenente la famiglia R_x regolare in x. Come è ben noto il minimo ed il massimo del rapporto

$$\frac{\alpha(U)}{mis\, U}$$

per $mis\, U \to 0$, per $U \prec \mathcal{R}_x$, sono rispettivamente la minima e la massima derivata di $\alpha(U)$ in x su $\mathcal{R}_x$. Se tali derivate hanno valore uguale e finito, la $\alpha(U)$ dicesi derivable in x su R_x.

Quando accade che $\mathcal{R}_x$ sia la famiglia regolare dei quadrati di $S_{(r)}$ aventi centro in x, le definizioni precedenti divengono quelle delle derivate simmetriche di $\alpha(U)$ in x.

Quando invece accade che $\mathcal{R}_x$ sia la famiglia ovviamente regolare in x delle maglie di una intrecciatura $\mathcal{J}$ contenenti il punto x, le definizioni precedenti divengono quelle delle derivate in x su $\mathcal{J}$ di $\alpha(U)$.

Giova osservare subito un teorema che ne generalizza uno analogo riportato da De la Vallée Poussin op. cit. pag. 60.

VII — *Data la famiglia di insiemi* $\{U\}$ *contenente la famiglia* $\mathcal{R}_x$, *regolare in* x, *e quella dei quadrati aventi centro in* x *supponiamo che la funzione* $\alpha(U)$ *sia definita in* $\{U\}$, *sia non negativa e che risulti per ogni* $U \prec \mathcal{R}_x$:

$$0 \leqq \alpha(U) \leqq \alpha[Q(x, U)].$$

Allora se in x *le derivate simmetriche di* $\alpha(U)$ *sono nulle, altrettanto accade delle derivate in* x *su* $\mathcal{R}_x$.

Infatti detto λ il parametro di regolarità di $\mathcal{R}_x$, per ogni $U \prec \mathcal{R}_x$, si ha:

$$0 \leqq \frac{\alpha(U)}{mis\, U} \leqq \frac{\alpha[Q(x, U)}{mis\, U} \leqq \frac{mis\, Q(x, U)}{mis\, U} \cdot \frac{\alpha[Q(x, U)]}{mis\, Q(x, U)}.$$

A questo teorema fa seguito l'altro:

VIII — *Data la famiglia elementare di insiemi* $\{U\}$ *contenente la famiglia* $\mathcal{R}_x$ *regolare in* x *e quella dei quadrati di centro in* x, *supponiamo che la funzione* $\alpha(U)$ *sia definita in* $\{U\}$, *sia non negativa e che risulti al variare di* U *in* $\mathcal{R}_x$:

$$0 \leqq \alpha(U) \leqq \alpha[Q(x, U)] \leqq \alpha(\Delta),$$

essendo Δ *uno degli intervalli di un prefissato sistema coniugato* $\mathcal{C}$, *di intrecciature di* $S_{(r)}$ *contenente* $Q(x, U)$.

Allora se la $\alpha(U)$ *definita in* $\{U\}$ *ha derivate nulle in* x *su tutte le intrecciature di* $\mathcal{C}$ *essa ha derivate nulle in* x *su* $\mathcal{R}_x$.

Infatti detto λ il parametro di regolarità di $\mathcal{R}_x$, indicata con Δ la maglia $\mathcal{C}$ contenente $Q(x, U)$ per cui é $mis\, \Delta < 6^r mis\, Q(x, U)$ (cfr. teor. 1) si ha:

$$0 \leqq \frac{\alpha(U)}{mis\, U} \leqq \lambda \frac{\alpha[Q(x, U)]}{mis\, Q(x, U)} \leqq 6^r \lambda \frac{\alpha(\Delta)}{mis\, \Delta}.$$

4. Nel presente paragrafo con $\{U\}$ denoteremo esclusivamente la famiglia di tutti gli insiemi lebesguiani e limitati di $S_{(r)}$ famiglia che, ovviamente, risulta elementare.

Del pari con $\alpha(U)$ indicheremo esclusivamente una funzione definita in $\{U\}$ additiva ed assolutamente continua tale cioè che:

1) sia $\alpha(U) = \alpha(U_1) + \alpha(U_2)$ ogni volta che U_1 ed U_2 siano privi di punti comuni e lebesguiani ed abbiasi $U = U_1 + U_2$,

2) scelto $\varepsilon > 0$ arbitrario si ad esso far corrispondere un numero $\delta_\varepsilon > 0$ tale che sia $|\alpha(U)| < \varepsilon$ ogni qual volta si abbia $U < \delta_\varepsilon$.

Ovviamente la $\alpha(U)$ è elementarmente additiva.

Ora è notorio che nelle condizioni poste esistono due funzioni definite in $\{U\}$ non negative, additive ed assolutamente continue $p_\alpha \{U\}$ e $Q_\alpha (U)$ (variazioni, positiva e negativa, di $\alpha(U)$) per le quali risulta $\alpha(U) = p_\alpha (U) - q_\alpha (U)$.

Per le $p_\alpha (U)$ e $q_\alpha (U)$ sono soddisfatte le condizioni richieste per l'applicabilità del teor. VI onde si conclude con una proposizione dalla quale trarremo partito nelle prossime deduzioni:

IX — *Una qualunque funzione $\alpha(U)$ additiva ed assolutamente continua è derivabile su una qualunque intrecciatura $\mathfrak{I}$ in tutti i punti di $S_{(r)}$ esclusi, al più, quelli di un insieme $N(\alpha, \mathfrak{I})$ di misura nula.*

Nel seguito, considerata una funzione $\pi(E)$ nella famiglia $\{E\}$, se questa è elementare, denoteremo con $\pi(x)_{\mathfrak{I}}$, quando esiste, la derivata di $\pi(E)$ in x su $\mathfrak{I}$; se, invece, la $\{E\}$ contiene la famiglia $\mathfrak{R}_x$ regolare in x denoteremo con $\pi'(x)_{\mathfrak{R}_x}$, quando esiste, la derivata di $\pi(E)$ in x su $\mathfrak{R}_x$.

Si dimostrano allora i teoremi seguenti:

X — *Se $\alpha'(x)_{\mathfrak{I}}$, per una assegnata $\alpha(U)$ additiva ed assolutamente continua, è quasi ovunque positiva nell'insieme lebesguiano I, risulta $\alpha(I) \geqq 0$ sussistendo il segno superiore se è $\text{mis}\, I > 0$.*

XI — *Se la funzione additiva assolutamente continua $\alpha(U)$ si annulla su tutti gli insieme U contenuti in un dato insieme lebesguiano I, esiste in I un insieme di misura nulla N_α, dipendente solo da $\alpha(U)$, tale che, in ogni punto $x \prec I - N_\alpha$, la $\alpha(U)$ sia derivabile su ogni famiglia regolare in x ed il valore della sua derivata è zero.*

Se di un dato insieme A di punti di $S_{(r)}$ si denota con ΓA il complementare, detto I un qualunque insieme lebesguiano di $S_{(r)}$, considerata la funzione additiva ed assolutamente continua:

$$\mu_I(U) = \begin{cases} mis(I \cdot U) & \text{per} \quad I \cdot U \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad I \cdot U = 0, \end{cases}$$

come è noto si ha che:

XII — *Nello spazio esiste un insieme N_I di misura nulla tale che la $\mu_I(U)$ in ogni $x \prec S_{(r)} - N_I$ è derivabile su ogni famiglia $\mathfrak{R}_x$ regolare in esso, e la sua derivata è uguale all'unità se è $x \prec I - N_I$ ed è uguale a zero se è $x \prec \Gamma I - N_I$.*

Possiamo finalmente stabilire il teorema fondamentale di LEBESGUE.

XIII — *Detta* $\{U\}$ *la famiglia degli insiemi lebesguiani e limitati di* $S_{(r)}$, *ad ogni funzione* $\alpha(U)$ *additiva ed assolutamente continua definita in* $\{U\}$, *può associarsi un insieme* N_α, *dipendente solo da* $\alpha(U)$, *di misura nulla in* $S_{(r)}$, *tale che in qualunque punto* $x \prec S_{(r)} - N_\alpha$ *e su qualunque famiglia* $\mathfrak{R}_x$ *regolare in* x *la* $\alpha(U)$ *sia derivabile con derivata indipendente da* $\mathfrak{R}_x$.

Dimostrazione. A causa del teor. IX si può assegnare l'insieme $A = N(\alpha, \mathfrak{I})$ tale che:

$$mis\, A = 0$$

ed in $S_{(r)} - A$ la $\alpha(U)$ resulti derivabile sulla intrecciatura $\mathfrak{I}$. Sia $\alpha'(x)_{\mathfrak{I}}$ la sua derivata. Denotiamo con I_{ab} l'insieme dei punti x di $S_{(r)} - A$ nei quali è $a < \alpha'(x)_{\mathfrak{I}} < b$ e poniamo:

$$\mu_{I_{ab}}(U) = \begin{cases} mis(U \cdot I_{ab}) & \text{per} \quad U \cdot I_{ab} \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad U \cdot I_{ab} = 0. \end{cases}$$

In conseguenza del teorema precedente, può costruirsi l'insieme $M = N_{I_{ab}}$ di misura nulla di guisa che sia:

$$\mu'_{I_{ab}}(x)\, \mathfrak{R}_x = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x \prec I_{ab} - M \\ 0 & \text{per} \quad x \prec \Gamma I_{ab} - M. \end{cases} \tag{4}$$

Poniamo poi:

$$\beta_\alpha(U) = \begin{cases} \alpha(U \cdot I_{ab}) & \text{per} \quad U \cdot I_{ab} \neq 0 \\ 0 & \text{per} \quad U \cdot I_{ab} = 0 \end{cases};$$

$$\gamma_\alpha(U) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad U \cdot \Gamma I_{ab} = 0 \\ \alpha(U \cdot \Gamma I_{ab}) & \text{per} \quad U \cdot \Gamma I_{ab} \neq 0 \end{cases}.$$

Le $\beta_\alpha(U)$ e $\gamma_\alpha(U)$, come facilmente si verifica, sono additive ed assolutamente continue e verificano la relazione:

$$\alpha(U) = \beta_\alpha(U) + \gamma_\alpha(U) \tag{5}$$

ed esistono i due insiemi di misura nulla B e C tali che $\beta_\alpha(U)$ e $\gamma_\alpha(U)$ siano derivabili su $\mathfrak{I}$ rispettivamente in tutti i punti di $S_{(r)} - B$ ed $S_{(r)} - C$ ed anzi (cfr. teor. XI) si ha:

$$\beta'_\alpha(x)_{\mathfrak{R}_x} = 0 \quad \text{per} \quad x \prec \Gamma I_{ab} - B \tag{6}$$

$$\gamma'_\alpha(x)_{\mathfrak{R}_x} = 0 \quad \text{per} \quad x \prec \Gamma I_{ab} - C, \tag{7}$$

essendo $\mathfrak{R}_x$ una generica famiglia regolare in x.

Dalla (5) consegue

$$\alpha'(x)_{\mathfrak{I}} = \beta'_\alpha(x)_{\mathfrak{I}} \quad \text{per} \quad x \prec I_{ab} - B - C. \tag{8}$$

Posto:

$$\Phi(\mathrm{U}) = a\mu_{\mathrm{I}_{ab}}(\mathrm{U}) - \beta'_\alpha(\mathrm{U}); \qquad \Psi(\mathrm{U}) = \beta_\alpha(\mathrm{U}) - b\,\mu_{\mathrm{I}_{ab}}(\mathrm{U}),$$

per $x \prec \mathrm{S}_{(r)} - \mathrm{M} - \mathrm{B}$ si ha:

$$\Phi'(x)_{\mathcal{J}} = a - \beta'_\alpha(x)_{\mathcal{J}}, \qquad \Psi'(x)_{\mathcal{J}} = \beta'_\alpha(x)_{\mathcal{J}} - b\,.$$

Per cui richiamate le (4), (6) e (8) si trova:

$$\Phi'(x)_{\mathcal{J}} = \begin{cases} > a - \alpha'(x)_{\mathcal{J}} & \text{per} \quad x \prec \mathrm{I}_{ab} - \mathrm{M} - \mathrm{B} - \mathrm{C} \\ > 0 & \text{per} \quad x \prec \Gamma\,\mathrm{I}_{ab} - \mathrm{M} - \mathrm{B} \end{cases};$$

$$\Psi'(x)_{\mathcal{J}} = \begin{cases} > \alpha'(x)_{\mathcal{J}} - b & \text{per} \quad x \prec \mathrm{I}_{ab} - \mathrm{M} - \mathrm{B} - \mathrm{C} \\ > 0 & \text{per} \quad x \prec \Gamma\,\mathrm{I}_{ab} - \mathrm{M} - \mathrm{B} \end{cases}.$$

Quindi risulta quasi ovunque in $\mathrm{S}_{(r)}$ $\Phi'(x)_{\mathcal{J}} \leqq 0$ e $\Psi'(x)_{\mathcal{J}} \geqq 0$ e per ciò, a causa del teor. X per ogni U si ha:

$$\Phi(\mathrm{U}) \leqq 0, \qquad \Psi(\mathrm{U}) \geqq 0$$

cioè:

$$\alpha\mu_{\mathrm{I}_{ab}}(\mathrm{U}) \leqq \beta_\alpha(\mathrm{U}) \leqq b\,\mu_{\mathrm{I}_{ab}}(\mathrm{U})\,.$$

Posto:

$$\mathrm{N}_{ab} = \mathrm{I}_{ab}(\mathrm{M} + \mathrm{C}),$$

scelto x in $\mathrm{I}_{ab} - \mathrm{N}_{ab}$ e richiamate le (4), (5) e (7) si conclude:

$$mis\,\mathrm{N}_{ab} = 0\,, \qquad \alpha \leqq \mathfrak{D}'\alpha(x)_{\mathfrak{R}_x} \leqq \mathfrak{D}''\alpha(x)_{\mathfrak{R}_x}$$

avendo denotate con $\mathfrak{D}'\alpha(x)_{\mathfrak{R}_x}$ e $\mathfrak{D}''\alpha(x)_{\mathfrak{R}_x}$ rispettivamente la minima e la massima derivata di $\alpha(\mathrm{U})$ su $\mathfrak{R}_x$ in x.

Numerati in qualche modo come è possible, gli intervalli dell'asse reale aventi estremi razionali, tra essi (a_k, b_k) sia quello corrispondente, nella fissata numerazione, all'intero positivo k. Considerato $\mathrm{I}_{a_k a_k}$, quanto abbiamo esposto sopra permette di assegnare un insieme $\mathrm{N}_{a_k b_k}$ contenuto in $\mathrm{I}_{a_k b_k}$ tale che sia $mis\,\mathrm{I}_{a_k b_k} = 0$ e

9) $$a_k \leqq \mathfrak{D}'\alpha(x)_{\mathfrak{R}_x} \leqq \mathfrak{D}''\alpha(x)_{\mathfrak{R}_x} \leqq b_k \quad \text{per} \quad x \prec \mathrm{I}_{a_k b_k} - \mathrm{N}_{a_k b_k}\,.$$

Posto

$$\mathrm{N}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{N}_{a_k b_k}$$

si ha

$$mis\,\mathrm{N}_\alpha = 0\,.$$

Ogni x appartenente ad $S_{(r)} - N_\alpha$ é estraneo ad A e pertanto in esso la $\alpha(U)$ è derivabile su $\mathcal{J}$. Detta, come al solito, $\alpha'(x)_{\mathcal{J}}$ la sua derivata, scelto $\varepsilon > 0$ si può, come é noto, assegnare l'intero positivo ν tale che sia:

$$\alpha'(x)_{\mathcal{J}} \prec (a_\nu, b_\nu) \tag{10}$$

$$0 < b_\nu - a_\nu < \varepsilon . \tag{11}$$

Consegue che è $x \prec I_{a_\nu b_\nu}$ e, per essere x estraneo ad N_α e quindi ad $N_{a_\nu b_\nu}$, in tale punto sussiste la (9) per $k = \nu$. Ciò, richiamata la (10) e la (11) fornisce:

$$|\alpha'(x)_{\mathcal{J}} - \mathcal{D}'\alpha(x)_{\mathcal{R}_x}| < b_\nu - a_k < \varepsilon ,$$

$$|\alpha'(x)_{\mathcal{J}} - \mathcal{D}''\alpha(x)_{\mathcal{R}_x}| < b_\nu - a_\nu < \varepsilon .$$

Per l'arbitrarietà di ε si conclude:

$$\alpha'(x)_{\mathcal{J}} = \mathcal{D}'\alpha(x)_{\mathcal{R}_x} = \mathcal{D}''\alpha(x)_{\mathcal{R}_x} .$$

Poichè questa uguaglianza sussiste per ogni $x \prec S_{(r)} - N_\alpha$ ed è $mis\, N_\alpha = 0$, il teorema è dimostrato.

5. Il teor. di LEBESGUE ora stabilito è suscettibile di applicazione alle funzioni di intervallo additive ed a variazione finita o come diremo brevemente con M. PICONE, alle funzioni determinanti. Indichiamo brevemente come ciò si ottiene.

Si dimostra, come è ben noto, che ogni funzione di intervallo del tipo detto è univocamente representatible come somma di una funzione determinante assolutamente continua e di una funzione determinante singolare (cfr. p. es. STANISLAW SAKS — *Théorie de l'Intégrale* — Varsavia 1933 pag. 15 teor. 9).

Se conveniamo di dire che una funzione di intervallo è derivabile sui quadrati in un punto dello spazio quando essa è derivabile in quel punto sulla famiglia regolare dei quadrati che lo contengono, in conseguenza della osservazione fatta, si può affermare che:

Ogni funzione determinante è derivabile sui quadrati in quasi tutti i punti di $S_{(r)}$

Ciò è una conseguenza immediata dei seguenti due teoremi

Ogni funzione di intervallo additiva ed assolutamente continua è derivabile sui quadrati in quasi tutti i punti di $S_{(r)}$

Infatti (Cfr. C. DE LA VALLÉE POUSSIN op. cit. pag. 77) nella famiglia $\{U\}$ degli insiemi lebesguiani e limitati di $S_{(r)}$ si può definire una funzione additiva ed assolutamente continua $\bar{\alpha}(U)$ che sugli intervalli T di $S_{(r)}$ assuma il valore della funzione di intervallo additiva ed assolutamente continua data $\alpha(T)$, tale cioè che sia:

$$\bar{\alpha}(T) = \alpha(T). \tag{12}$$

A causa del teor. XIII si può assegnare un insieme di misura nulla tale che in ogni punto x di $S_{(r)}$ estraneo ad esso la $\bar{\alpha}(U)$ sia derivabile sulla famiglia regolare dei quadrati contenente x: poichè sussiste la (12) altrettanto accade per la $\alpha(T)$, c. d. d.

Ogni funzione determinante singolare è derivabile ed ha derivata nulla sui quadrati in quasi tutti i punti di $S_{(r)}$.

Per dimostrarlo si procede come segue:

Dato l'intervallo chiuso T, denotiamo con K_T l'intervalo aperto superiormente che ha i suoi stessi punti estremi e, reciprocamente, dato l'intervallo aperto superiormente K denotiamo con T_K l'intervallo chiuso che ha i suoi stessi punti estremi. É appena necessario rilevare che è:

$$T_{K_T} = T.$$

Indicata con $\{E\}$ la famiglia elementarmente additiva costituita da tutti gli intervalli chiusi e da tutti gli intervalli aperti superiormente di $S_{(r)}$, poniamo:

$$p^*(E) = \begin{cases} p(T_K) & \text{per} \quad E = K \\ p(T) & \text{per} \quad E = T \end{cases} \tag{13}$$

onde consegue:

$$p^*(K_T) = p(T_{K_T}) = p(T). \tag{14}$$

La $p^*(E)$ risulta elementarmente additiva e non negativa in $\{E\}$ onde è applicabile il teor. IV; per ciò, scelto comunque un intervallo chiuso T ed un insieme lebesguiano $J \prec TI''_a(p^*, \vartheta)$, posto $J' = J \cdot K_T$, è:

$$p^*(K_T) = a \, mis \, J'$$

per ogni intrecciatura ϑ; ma, risulta $mis \, J' = mis \, J$, ed allora a causa della (14) si deduce:

$$p(T) > a \, mis \, J.$$

Questa disuguaglianza permette di procedere come alla condizione necessaria del teor. 7 pag. 55 dell'op. cit. di SAKS, purchè nello enunciato di tale teorema si consideri come funzione singolare la $p(T)$ e si operi anzichè sulla derivata della detta funzione singolare, sulla derivata sopra l'intrecciatura $\mathfrak{J}$ della $p^*(\mathrm{E})$. Se ne deduce:

$$p^{*\prime}(x)_{\mathfrak{J}} = 0$$

quasi ovunque in $\mathrm{S}_{(r)}$. Ma alla $p^*(\mathrm{E})$, d'altra parte, si può applicare il teor. VIII e quindi è $p^{*\prime}(x)_{\{\mathrm{Q}_x\}} = 0$ quasi ovunque in $\mathrm{S}_{(r)}$, essendo $\{\mathrm{Q}_x\}$ la famiglia regolare in x dei quadrati che contengono il punto nominato; poichè la definizione (13) implica $p^{*\prime}(x)_{\{\mathrm{Q}_x\}} = p'(x)_{\{\mathrm{Q}_x\}} = 0$ quasi ovunque in $\mathrm{S}_{(r)}$, il teorema è dimostrato.

Roma, 1951.