PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 11
1 9 5 2

Publicação subsidiada por
Publication subventionnée par   Publication sponsored by

JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA e SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Edição de

«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua Serpa Pinto, 17, 4.º-E.
LISBOA (PORTUGAL)

HERMANN & C.ie, Éditeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5ième)

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. — 11 Fasc. 2 — 1952

CARACTERISATION DIRECTE SOUS FORME EXPONENTIELLE DES TRANSFORMATIONS DE LAPLACE GENERALISEES *

PAR RICARDO SAN JUAN
Professeur à l'Université de Madrid

1. Introduction. Dans (5, a, 115-120) [1] et plus systématiquement dans (5, b), nous avons établi des théorèmes au sujet de la caractérisation dans divers espaces des transformations de LAPLACE généralisées sous leurs deux formes équivalentes, exponentielle et potentielle:

$$f(z)=\int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-tg(z)}=\int_0^1 \psi(x)\, x^{g(z)-1}\, dx\,, \quad [\psi(x)=\varphi(-\log x)],$$

dans lesquelles $g(z)$ est une fonction complexe de la variable complexe z, soumisse à la seule condition de prendre des valeurs appartenant au demi-plan de convergence de la transformation ordinaire.

Afin de pouvoir appliquer les théorèmes de F. RIESZ et H. STEINHAUS dans un intervalle fini (1,61 et 65) nous avons caractérisé au préalable la forme potentielle et nous passions ensuite à la forme exponentielle.

Les notions de successions complètes introduites dans les énoncés (5, b) pour la plus grande généralité des résultats coïncidaient avec les notions classiques, ou apparaissaient d'une manière tout à fait naturelle pour les nouveaux espaces, dans le cas d'un intervalle $(0,1)$. Mais pour passer à l'intervalle $(0,\infty)$, elles se convertissaient en notions artificielles qui ne coïncidaient pas avec celles utilisées pour les espaces classiques et n'étaient pas naturelles pour les espaces nouveaux.

Nous laisserrons donc de côté les caractérisations correspondantes à $(0,1)$, qui furent établies de façon satisfaisante dans les dits énoncés, et nous allons démontrer ici directement les théorèmes de caractérisations de la forme exponentielle sur les espaces U, L et $\mathrm{L}^r (r<1)$ en

---

* Reçu en Mai, 1952.

[1] V. la Bibliographie à la fin de l'article. Le premier chiffre indique l'auteur, la lettre, quand elle figure, la monographie et les derniers chiffres indiquent les pages.

utilisant seulement les notions classiques de sucessions complètes dans C, L et L^r respectivement. On y arrive très facilement en s'appuyant sur les généralisations des théoremes de F. RIESZ et H. STEINHAUS pour l'intervalle infini.

Nous sommes redevables de la connaissance de l'état actuel des théorèmes de F. RIESZ, H. STEINHAUS et M. FRECHET au Professeur HORWART, qui nous l'a exposé dans une lettre privée d'une manière tellement claire et précise que nous nous faisons un plaisir de la reproduire ici:

«Soit E un espace topologique localement compact et désignons par C l'espace de BANACH des fonctions continues sur E et telles que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble compact $K \subset E$ (qui dépend bien entendu, de la fonction $\varphi(t)$) telle que $|\varphi(t)| < \varepsilon$ sur le complémentaire de K. Toute fonctionnelle linéaire bornée $F(\varphi)$ définie sur C s'écrit alors de la forme:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_E \varphi(t)\, d\mu$$

où $d\mu$ est le symbole d'une mesure de RADON de masse totale finie $= \int |d\mu| < \infty$.

«Soit d'autre part $L^r (r \geqq 1)$ l'espace de BANACH des fonctions mesurables et de r-ième puissance sommable pour une mesure de RADON $d\mu$ definie sur E. Soit aussi L^s l'espace des fonctions essentiellement bornées sur E. Dans ce cas toute fonctionnelle linéaire bornée $\mathcal{F}(\varphi)$ définie sur $L^r (1 \leqq r < \infty)$ s'écrit de la forme:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_E \varphi(t)\, d(t)\, d\mu$$

où $\qquad \alpha(t) \in L^s, \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \qquad (si\ r = 1, s = \infty).$

Ces théorèmes sont basés sur les faits suivants: Soit L l'ensemble (formant un espace vectoriel *non nécessairement normé*) des fonctions continues sur E *et nulles hors d'un compact*. Soit L_+ l'ensemble des fonctions positives L. Alors:

1) Il y a identité entre les mesures de RADON positives sur E et les opérations linéaires *positives* sur L_+.

2) Les fonctions formant L sont partout denses dans chacun des espaces C et $L^r (1 \leqq r < \infty)$.

Ces résultats sont énoncés avec quelques indications des démonstrations dans les travaux (6, 30-33), (2, 71-96), (4, 1-48), voir en particulier 3-7).

Les démonstrations complètes seront publiées dans le livre sur l'intégration de BOURBAKI qui devra paraître au mois d'Avril».

2. Caractérisation sur U.

DEFINITION. *Soit* U (3, a, 226) (5, a, 119) *l'espace des fonctions* $\varphi(t)$ *réelles ou complexes sommables dans chaque intervalle* $[t_0, t_1]$ *et avec intégrale impropre* (3, b, 538) *ou généralisée convergente dans* $(0, \infty)$, *c'est à dire:*

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = \lim_{t_0 \to 0+} \int_{t_0}^c \varphi(t)\,dt + \lim_{t_1 \to +\infty} \int_c^{t_1} \varphi(t)\,dt, \quad t_0 \leqq c \leqq t_1$$

où la norme est:

$$\|\varphi\| = \max_{0 \leq t_0 \leq t_1 \leq +\infty} \left| \int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)\,dt \right|$$

I. Les primitives

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)\,du$$

forment un sous espace vectoriel C_1 de l'espace C des fonctions continues sur le demi axe compact $[0, +\infty]$ et nulles au point 0, c'est à dire:

$$\|\Phi\| = \max_{0 \leq t \leq +\infty} |\Phi(t)| = \max_{0 \leq t_0 \leq t \leq +\infty} \left| \int_{t_0}^t \varphi(u)\,du \right| = \|\varphi\|;$$

car on a évidemment:

$$\max_{0 \leq t_0 \leq t \leq +\infty} \left| \int_{t_0}^t \right| \geqq \max_{0 = t_0 \leq t \leq +\infty} \left| \int_{t_0}^t \right|;$$

et d'autre part d'après;

$$\left| \int_{t_0}^t \right| \leqq \left| \int_0^t \right| + \left| \int_0^{t_0} \right|,$$

ou il en résulte:

$$\max_{0 \leq t_0 \leq t \leq +\infty} \left| \int_{t_0}^t \right| \leqq \max_{0 \leq t \leq +\infty} \left| \int_0^t \right|$$

II. Chaque fonctionnelle linéaire $\mathcal{F}(\varphi)$ (distributive et continue), sur U se transforme par isométrie en une autre fonctionnelle linéaire $\mathcal{F}_1(\Phi) = \mathcal{F}(\varphi)$ sur C_1.

Mais comme C_1 est un sous espace vectoriel de C, il existe (1,55) une fonctionnelle $\mathcal{F}_2(\Phi)$ définie sur tout C qui coïncide avec $\mathcal{F}_1(\Phi)$ sur C_1, c'est à dire $\mathcal{F}_1(\Phi) = \mathcal{F}_2(\Phi)$ pour $\Phi \in C_1$.

Or, C est un espace de BANACH où chaque fonction $\Phi(t)$ se conserve $|\Phi(t)| < \varepsilon$ en dehors d'un compact $[\delta, +\infty]$, donc on peut appliquer (1) le

III. THEOREME DE F. RIESZ dans $[0, \infty]$. Toute fonctionnelle linéaire $\mathcal{F}(\Phi)$ définie dans l'espace C des fonctions continues sur le demi axe compact $[0, +\infty]$ et nulles en 0 est de la forme:

$$\mathcal{F}_2(\Phi) = \int_0^\infty \Phi(t)\, d\alpha(t)$$

où $\alpha(t)$ est une fonction de variation bornée dans $[0, \infty]$:

$$\int_0^\infty |d\alpha(t)| < \infty,$$

que nous pouvons choisir telle que $\alpha(+\infty) = 0$.

En particulier, la fonctionnelle $\mathcal{F}_1(\Phi)$ définie dans C_1 est exprimée de cette façon ; et comme conséquence la $\mathcal{F}(\varphi)$ définie sur U, c'est à dire:

IV. — Toute fonctionnelle linéaire $\mathcal{F}(\varphi)$ définie sur U est de la forme:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t)\,\alpha(t)\, dt,$$

où $\alpha(t)$ est une fonction de variation bornée dans $[0, +\infty]$:

$$\int_0^\infty |d\alpha(t)| < \infty \qquad \text{avec} \qquad \alpha(+\infty) = 0$$

Cela permet de démontrer directement la:

V. *Caractérisation au moyen de la Faltung.* Pour qu'une opération fonctionnelle $f(z) = \mathcal{F}(\varphi)$ qui transforme chaque fonction $\varphi \in U$ en une fonction complexe $f(z)$ de la variable complexe z définie sur un ensemble D, soit une transformation de LAPLACE généralisée:

$$\mathcal{L}(\varphi, g) = \int_0^\infty \varphi(t)\, e^{-tg(z)}\, dt,$$

dans laquelle $g(z)$ est une fonction complexe d'abscisse $\mathcal{R}\, g(z) > 0$ sur D, il est nécessaire et suffisant que pour chaque $z \in D$, l'opération $\mathcal{F}(\varphi)$ soit une fonctionnelle linéaire (distributive et continue) dans U, qui satisfasse en outre aux deux conditions suivantes :

1. Il existe F(1) pour chaque $z \in D$, même si 1 n'appartient pas à U, et l'on a $\mathcal{R}\, \frac{1}{F(1)} > 0$.

2. Elle vérifie la loi de composition où règle de la Faltung

$$\mathcal{F}(\varphi^* \varphi_1) = \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(\varphi_1)$$

où

$$\varphi^* \varphi_1 = \int_0^t \varphi(t-u)\, \varphi_1(u)\, du$$

pour chaque paire de fonctions φ et φ_1 de U ; ou au moins pour :

$$1^* e^{-at} = \int_0^t e^{-au}\, du$$

$$e^{-at} * e^{-at} \varphi_n(t) = e^{-at} \Phi_n(t) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

où $a = g(z_0) > 0$ est la valeur de $g(z)$ au point $z_0 \in D$ et $\{\varphi_n\} \in U$ une succession de fonctions de U dont les primitives

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \varphi_n(u)\, du$$

forment une sucession complète $\{\Phi_n\}$ sur l'espace des fonctions continues dans l'intervalle compact $[0, +\infty]$ et nulles en 0 ; c'est à dire (1,72), telles que l'annulation des intégrales de Stieltjes :

$$\int_0^\infty \Phi_n(t)\, d\xi(t) = 0 \qquad \text{pour } n = 1, 2 \cdots$$

entraîne $\xi(t) \equiv 0$ dans $[0, +\infty]$ à l'exception d'un sous ensemble numérable, quelle que soit la fonction $\xi(t)$ de variation bornée dans $[0, +\infty]$:

$$\int_0^\infty |d\xi(t)| < \infty .$$

La coïncidence de l'opération données $\mathcal{F}(\varphi)$ avec une transformation de LAPLACE $\mathcal{L}(\varphi, g)$, fixée au préalable donnant $g(z)$ avec $\mathcal{R}\, g(z) > 0$, est assurée au moyen de la condition initiale $\mathcal{F}(1) = 1/g(z)$.

Démonstration. En vertu, de IV, pour chaque $z \in D$ et $\varphi \in U$ on a.

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t)\,\alpha(z,t)\,dt,$$

où $\alpha(z,t)$ est une fonction de variation bornée dans $[0, +\infty]$:

$$\int_0^\infty |d\alpha(z\cdot t)| < \infty \quad \text{avec} \quad \alpha(z, +\infty) = 0, \ (z \in D)$$

En particulier:

$$\mathcal{F}[e^{-at}\varphi_n(t)] = \int_0^\infty e^{-at}\varphi_n(t)\,\alpha(z,t)\,dt = -\int_0^\infty \Phi_n(t)\,d[e^{-at}\alpha(z,t)],$$

$$\mathcal{F}[e^{-at}\Phi_n(t)] = \int_0^\infty e^{-at}\Phi_n(t)\,\alpha(z,t)\,dt =$$

$$= -\int_0^\infty \Phi_n(t)\,d\int_t^\infty e^{-au}\alpha(z,u)\,du;$$

donc d'après 2:

$$\int_0^\infty \Phi_n(t)\,d\int_t^\infty e^{-au}\alpha(z,u)\,du = \mathcal{F}(e^{-ab})\int_0^\infty \Phi_n(t)\,d[e^{-at}\alpha(z,t)]$$

mais:

$$\int_0^\infty \left| d\int_t^\infty e^{-au}\alpha(z,u)\,du \right| = \int_0^\infty e^{-at}|\alpha(z,t)|\,dt \leqq$$

$$\leqq \max_{0\leq t\leq+\infty} |\alpha(z,t)| \int_0^\infty e^{-au}\,du \leqq \int_0^\infty |d\alpha(z,t)| \int_0^\infty e^{-at}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^\infty |d\alpha(z,t)| < \infty.$$

$$\int_0^\infty |d[e^{-at}\alpha(z,t)]| \leqq a\int_0^\infty e^{-at}|\alpha(z,t)|\,dt + \int_0^\infty e^{-at}|d\alpha(z,t)| \leqq$$

$$\leqq 2\int_0^\infty |d\alpha(z,t)| < \infty;$$

et comme $\{\Phi_n\}$ est complète sur C, on a:

$$\int_t^\infty e^{-au}\alpha(z,u)\,du = \mathcal{F}(e^{-at})\,e^{-at}\alpha(z,t),$$

c'est à dire:

$$\alpha'_t(z,t) = \left[a - \frac{1}{\mathcal{F}(e^{-ab})}\right]\alpha(z,t)$$

et par conséquent:

$$\alpha(z,t) = k(z)\, e\left\{a - \frac{1}{\mathcal{F}(e^{-at})}\right\}$$

dans $[0, +\infty]$ à l'exception d'un sous ensemble tout au plus numérable. Donc pour chaque $z \in D$ et $\varphi \in U$, on a:

$$\mathcal{F}(\varphi) = k(z) \int_0^\infty \varphi(t)\, e\left[\left(a - \frac{1}{\mathcal{F}(e^{-ab})}\right) t\right] dt.$$

Or, d'après.

$$1 * e^{-at} = -\frac{1}{a}(e^{-at} - 1),$$

il en résulte d'après 2 la propriété distributive:

$$\mathcal{F}(1)\,\mathcal{F}(e^{-at}) = -\frac{1}{a}\mathcal{F}(e^{-at}) + \frac{1}{a}\mathcal{F}(1);$$

d'où:

$$\frac{1}{\mathcal{F}(e^{-at})} = a + \frac{1}{\mathcal{F}(1)},$$

et par conséquent:

$$\Re \frac{1}{\mathcal{F}(e^{-at})} > 0;$$

on a donc:

$$\mathcal{F}(e^{-at}) = k(z) \int_0^\infty e\left\{-\frac{t}{\mathcal{F}(e^{-at})}\right\} dt = k(z)\, \mathcal{F}(e^{-at})$$

d'où $k(z) \equiv 0$ sur D.

Nous obtnons donc en définitive pour chaque $z \in D$ et $\varphi \in U$:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t)\, e\left\{-\frac{t}{\mathcal{F}(\varphi)}\right\} dt \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}\frac{1}{\mathcal{F}(1)} > 0,$$

comme nous voulions démontrer.

En particulier on otiendra par conséquent $\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{L}(\varphi, g)$ avec $g(z)$ fixée à l'avance d'abscisse $\mathcal{R} g(z) > 0$, en prenant $\mathcal{F}(1) = \dfrac{1}{g(z)}$.

Réciproquement quelle que soit $g(z)$ avec $\mathcal{R} g(z) > 0$ sur D, il existe $\mathcal{L}(1, g) = \dfrac{1}{g(z)}$; et l'on a $\Re \dfrac{1}{\mathcal{L}(1, g)} > 0$ sur D, comme l'exige 1.

Si $\varphi \in U$, par définition il existe:

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)\,du \quad \text{avec} \quad |\Phi(t)| \leqq \|\varphi\| \quad \text{dans} \quad 0 \leqq t \leqq +\infty,$$

et l'on a:

$$\mathcal{L}(\Phi, g) = \frac{1}{g(z)}\mathcal{L}(\varphi, g) = \mathcal{L}(1, g)\mathcal{L}(\varphi, g),$$

d'où:

$$|\mathcal{L}(\varphi, g)| \leqq |g(z)|\,|\mathcal{L}(\Phi, g)| \leqq \frac{|g(z)|}{\mathcal{R}\,g(z)}\|\varphi\|,$$

pour chaque $z \in D$. La fonctionnelle est donc linéaire sur U.

Il en résulte en outre, en particulier:

$$\mathcal{L}(1 * e^{-at}, g) = \mathcal{L}(1, g)\mathcal{L}(e^{-at}, g) \qquad (a > 0)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{-at} * e^{-at}\varphi(t), g] &= \mathcal{L}[e^{-at}\Phi(t), g] = \mathcal{L}[\Phi(t), g(z) + a] = \\ &= \mathcal{L}[1, g(z) + a]\mathcal{L}[\varphi, g(z) + a] = \mathcal{L}[e^{-at}, g]\cdot\mathcal{L}[e^{-at}\varphi(t), g],\end{aligned}$$

comme l'exige 2.

VI. *Caractérisation au moyen de la loi de dérivation.* La condition nécessaire et suffisante pour qu'une opération fonctionnelle $f(z) = \mathcal{F}(\varphi)$ qui transforme chaque $\varphi \in U$ en une $f(z)$ définie sur un ensemble D du plan complexe, soit une transformation de LAPLACE $\mathcal{L}(\varphi, g)$, déterminée par sa $g(z)$ avec $\mathcal{R}\,g(z) > 0$ sur D, est que pour chaque $z \in D$, l'opération soit une fonctionnelle linéaire sur U qui vérifie la loi de dérivation:

$$g(z)\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}(\varphi') + \varphi(0)$$

pour chaque fonction $\varphi \in U$ dérivable sur $0 < t < +\infty$ et continue dans $0 \leqq t \leqq +\infty$; ou au moins pour 1 (même si 1 n'appartient pas à U), e^{-at} avec $a > 0$ et $e^{-at}\Phi_n(t)$ $(n = 1, 2 \cdots)$, $\{\Phi_n\}$ étant une succession de fonctions dérivables dans $0 < t < +\infty$ complète sur l'espace C des fonctions continues sur $0 \leqq t \leqq +\infty$ et nulles en $\mathcal{O}$.

Démonstration. De la loi de dérivation, on déduit sucessivement:

$$\mathcal{F}(0) = 0, \quad g(z)\mathcal{F}(1) = 1, \quad \mathcal{R}\frac{1}{\mathcal{F}(1)} = \mathcal{R}\,g(z) > 0 \quad \text{en D}$$

$$g(z)\mathcal{F}(e^{-at}) = -a\mathcal{F}(e^{-at}) + 1, \quad \mathcal{F}(e^{-at}) = \frac{1}{g(z) + a}$$

$$g(z)\mathcal{F}\left(\int_0^t e^{-au}\,du\right) = \mathcal{F}(e^{-at}), \quad \mathcal{F}(1 * e^{-at}) = \mathcal{F}(1)\cdot\mathcal{F}(e^{-at})$$

$$g(z)\mathcal{F}[e^{-at}\Phi_n(t)] = \mathcal{F}[e^{-at}\varphi_n(t)] - a\mathcal{F}[e^{-at}\Phi_n(t)]$$

$$\mathcal{F}[e^{-at}\Phi_n(t)] = \frac{1}{g(z)+a}\mathcal{F}[e^{-at}\varphi_n(t)] = \mathcal{F}(e^{-at})\mathcal{F}[e^{-at}\varphi_n(t)].$$

La réciproque est bien connue.

3. Successions complètes sur U. Conformément à notre dessein initial nous avons exprimé les théoremes en employant seulement la notion de successions complètes sur C. Cela conduit cependant d'une façon naturelle à la définition suivante pour l'espace U:

Nous dirons qu'une succession $\{\varphi_n\}$ est complète sur U quand l'annulation des intégrales de LEBESGUE, propres ou impropres:

$$\int_0^\infty \xi(t)\varphi_n(t)\,dt = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

entraîne $\xi(t) \equiv 0$ sur $[0, +\infty]$ à l'exception d'un l'ensemble de points tout au plus numérable, quelle que soit la fonction $\xi(t)$ de variation bornée dans $[0, +\infty]$:

$$\int_0^\infty |d\xi(t)| < \infty.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que $\{\varphi_n\}$ soit complète sur U est que $\{\Phi_n\}$ soit complète sur C, en désignante comme toujours:

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \varphi_n(u)\,du.$$

Les théorèmes de caractérisation peuvent donc être énoncés, et cela d'une façon plus brève, en employant ces successions $\{\varphi_n\}$ complètes sur U.

La définition des successions fermées sur U est la même (1,72) que pour l'espace C et son équivalence avec celle de sucessions complètes résulte du même procédé que pour l'intervalle fini (1,73), comme on peut s'en assurer en voyant de nouveau l'exposé de BANACH; mais nous ne pensons pas qu'il vaille la peine d'insister là-dessus parce que tout cela résultera probablement comme application immédiate des théorèmes généraux qui nous pensons seront publiés dans le volume au sujet de l'intégration de la collection BOURBAKI; en outre ces considérations seraient tout à fait en dehors de l'objet du présent article.

4. Caractérisation sur L.

Définition. Soit L l'espace des fonctions réelles ou complexes, $\varphi(t)$, sommables dans $[0, +\infty]$ où l'on prend la norme :

$$\|\varphi\| = \int_0^\infty |\varphi(t)| \, dt.$$

I. Théorème de Steinhaus dans $[0, +\infty]$. Toute fonctionnelle linéaire sur L est de la forme :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t) \alpha(t) \, dt,$$

où $\alpha(t)$ est une fonction mesurable et bornée presque partout dans $[0, +\infty]$.

II. *Caractérisation au moyen de la Faltung.* Le théorème de caractérisation au moyen de la loi de composition (2, IV) subsiste avec la définition usuelle des successions $\{\varphi_n\}$ complètes sur L, à savoir (1,73) :

$$\int_0^\infty \xi(t) \varphi_n(t) \, dt = 0 \quad \text{pour} \quad n = 1, 2 \cdots,$$

entraîne $\xi(t) \equiv 0$ presque partout dans $[0, +\infty]$, quelle que soit la fonction $\xi(t)$ mesurable et bornée presque partout dans $[0, +\infty]$.

Démonstration. Pour chaque $z \in D$ et $\varphi \in D$, on a :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t) \alpha(z, t) \, dt$$

dans laquelle $\alpha(z, t)$ est mesurable et bornée presque partout dans $[0, +\infty]$.

En particulier :

$$\mathcal{F}[e^{-at}\Phi_n(t)] = \int_0^\infty e^{-at}\Phi_n(t) \alpha(z, t) \, dt =$$

$$= \int_0^\infty \varphi_n(t) \left(\int_t^\infty e^{-au} \alpha(z, u) \, du \right) dt,$$

et selon (2, V) :

$$\int_0^\infty \varphi_n(t) \left(\int_0^t e^{-au} \alpha(z, u) \, du \right) dt =$$

$$= \mathcal{F}(e^{-at}) \int_0^\infty \varphi_n(t) e^{-at} \alpha(z, t) \, dt,$$

mais les fonctions $e^{-at}\alpha(z, t)$ et $\int_t^{\infty} e^{-au}\alpha(z, u)\,du$ sont mesurables et bornées dans $[0, +\infty]$ puisque $\alpha(z, t)$ possède ces propriétés; ainsi la succession $\{\varphi_n\}$ est maintenant complète sur L et il en résulte la même équation :

$$\int_t^{\infty} e^{-au}\alpha(z, u)\,du = \mathcal{F}(e^{-at})\,e^{-at}\alpha(z, t)$$

presque partout dans $[0, +\infty]$. On en déduit le théorème exactement comme sur U.

La réciproque se démontre également comme sur U.

III. *Caractérisation au moyen de la loi de dérivation.* Comme sur U le même théorème (2, VI) est valable, mais on a $\{\varphi_n\}$ complète sur L et $\Phi_n(t) = \int_0^t \varphi_n(u)\,du \quad (n = 1, 2, \cdots)$. La démonstration est la même.

5. Caractérisation sur L^r avec $r > 1$.

DÉFINITION. Soit L_r avec $r > 1$ l'espace des fonctions réelles ou complexes avec $|\varphi(t)|^r$ somable dans $[0, +\infty]$ et où :

$$\|\varphi\| = \left(\int_0^{\infty} |\varphi(t)|^r\,dr\right)^{1/r}.$$

I. THÉORÈME DE F. RIESZ dans $[0, +\infty]$. Toute fonctionnelle linéaire $\mathcal{F}(\varphi)$ sur L^r est de la forme :

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,\alpha(t)\,dt$$

où :

$$\alpha(t) \in L^s, \qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

II. *Caractérisation au moyen de la Faltung.* Le théorème (2, V) de caractérisation au moyen de la loi de composition est valable sur $L^r(r > 1)$, $\{\varphi_n\}$ étant une succession complète sur L^r, c'est à dire, telle que :

$$\int_0^\infty \xi(t)\varphi_n(t)\,dt = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 1, 2, \dots$$

entraîne $\xi(t) \equiv 0$ presque partout dans $[0, +\infty]$, quelle que soit $\xi(t) \in L^s$.

Démonstration. Pour chaque $z \in D$ et $\varphi \in L^r$, on a:

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(t)\,\alpha(z, t)\,dt, \quad \text{avec} \quad \alpha(z, t) \in L^s,$$

et il résulte de la condition 2, comme dans (4, II);

$$\int_0^\infty \varphi_n(t)\left(\int_t^\infty e^{-au}\alpha(z, u)\,du\right) = \mathcal{F}(e^{-at})\int_0^\infty \varphi_u(t)\,e^{-at}\alpha(z, t)\,dt;$$

mais:

$$\int_0^\infty |e^{-at}\alpha(z, t)|^s\,dt \leqq \|\alpha\|^s,$$

$$\left|\int_t^\infty e^{-au}\alpha(z, u)\,du\right| \leqq$$

$$\leqq \left(\int_t^\infty e^{-aru}\,du\right)^{1/r}\left(\int_t^\infty |\alpha(z, t)|^s\,dt\right)^{1/s} \leqq \frac{\|\alpha\|}{(ar)^{1/r}}\,e^{-at},$$

$$\int_0^\infty \left|\int_t^\infty e^{-au}\alpha(z, u)\,du\right|^s dt \leqq \frac{\|\alpha\|^s}{(ar)^{s/r}}\int_0^\infty e^{-ast}\,dt = \frac{\|\alpha\|^s}{as\,(ar)^{s/r}},$$

donc $e^{-at}\alpha(z, t) \in L^s$ et aussi:

$\int_t^\infty e_{-au}\,\alpha(z, u)\,du \in L^s$; et comme $\{\varphi_n\}$ est complète sur L^r, on obtient l'équation qui caractérise le noyau comme d'habitude.

Réciproquement: pour chaque $z \in D$, comme $\mathcal{R}\,g(z) > 0$, on a:

$$|\mathcal{L}(\varphi, g)| = \left|\int_0^\infty \varphi(t)\,e^{-tg(z)}\,dt\right| \leqq$$

$$\leqq \left(\int_0^\infty |\varphi(t)|^r\,dt\right)^{1/r}\left(\int_0^\infty e^{-stg(z)}\right)^{1/s} \leqq \frac{\|\varphi\|}{[s\,\mathcal{R}\,g(z)]^{1/s}},$$

donc la fonctionnelle est linéaire sur L^r; les autres hypothèses se vérifient exactement de la même manière que sur U.

III. *Caractérisation au moyen de la loi de dérivation.* Elle est valable sur L^r $(r>1)$, $\{\varphi_n\}$ étant une succession complète sur L^r et

$$\Phi_n(t) = \int_0^t \varphi_n(u)\,du \quad (n=1,2\cdots).$$

Observations. 1.° — Ce théorème de caractérisation au moyen de la loi de dérivation a été démontré d'une manière élégante pour le cas $r=2$ et $g(z)\equiv z$ par le Professeur G. DOETSCH, sans utiliser le théorème de F. RIESZ, en s'appuyant seulement sur les propriétés des polynomes de LAGUERRE typiques de la la transformation de LAPLACE (3, a, 223).

La conclusion $\mathcal{F}(\varphi)=\mathcal{L}(\varphi)$ subsistera naturellement, non seulement pour l'espace L^2 mais aussi pour un E quelconque qui contienne L^2 comme ensemble dense sur lui et où les opérations $\mathcal{F}(\varphi)$ et $L(\varphi)$ soient encore continues. D'une manière plus générale, si le dit espace E contient un sous ensemble qui soit simultanément dense sur E avec la métrique de E et aussi dense sur L^2 avec la métrique de L^2; à la condition que, d'autre part les deux transformations $\mathcal{F}(\varphi)$ et $\mathcal{L}(\varphi)$ soient continues sur chaque espace E et $\mathcal{L}^2$ avec leur métrique respective.

Cela se produit en particulier, comme le démontra d'une façon rigoureuse le Professeur DOETSCH, pour la somme ou réunion de L et L^2 $(L+L^2=E)$ ou de U et $L^2(E=U+L^2)$ (3, a, 225 et 227-230).

Mais il évident que ces généralisations du théorème sur L^2 ne constituent pas des caractérisations sur L ou U; en effet elles exigent la continuité sur L^2, propriété que ne possèdent certainement pas certaines transformations de LAPLACE convergentes (2, b, 39) et dont on ne pourra certainement pas se passer avec la deuxième méthode de démonstration (3, a) car celle-çi s'appuyait sur des propriétés spécifiques de l'espace L^2.

2.° — Les théorèmes que nous avons démontrés ici peuvent s'étendre aux espaces que nous considérons dans (5, b) d'une façon tellement simple que nous jugeons inutile d'insister.

3.° — Par contre, nous signalerons que la caractérisation au moyen de la Faltung est la seule explication mathématique rigoureuse du caractère exclusif du rôle que joue la transformation de LAPLACE dans la résolution des équations intégrales (7,40), et comme conséquence naturelle dans tous les phénomènes physiques susceptibles d'être traités au moyen de ces équations.

4.° — Cette caractérisation peut être généralisée au cas de deux ou plusieurs variables et peut-être dans le cas du produit défini dans la théorie des distributions de SCHWARZ.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Banach, S *Théorie des opérations linéaires.* Warszawa, 1932.

[2] Cartan, H. *Sur les fondements de la théorie du potentiel.* Bull. Soc. Math. de France. **69** (1941).

[3] Doetsch., G. a) *Characterisierung der Laplace – Transformation durch ihr Differentiations gezetz.* Mathematische Nachrichten, **35** – Mai-Juli 1951.
b) *Hambuch der Laplace-Transformation.* Berlin 1950.

[4] Godement. B., *Les fonctions du type positif et la théorie des groupes.* Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948).

[5] San Juan. R., a) *Caractérisations fonctionnelles des Transformations de Laplace.* Portugaliae Mathematica, **10**. Fasc. 3. 1951.
b) *Caracterizaciones funcionales de las transformaciones de Laplace generalizadas en los espacios* L, L^r, R *y* U. Revista mat. hispano-americana 4.ª Ser. TXII — Enero — Febrero 1952.

[6] Weil A, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications.* Hermann & Cie. 1940.

[7] Parodi M. *Equations intégrales et transformation de Laplace.* Publications scientifiques et techniques du Ministère de l'Air. Paris 1950.