PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 14
1955

Publicação subsidiada por
Publication subventionnée par Publication sponsored by
JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA e SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Edição de
«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua de Serpa Pinto, 17, 4.º-E.
LISBOA (PORTUGAL)

HERMANN & C.ie, Editeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5 eme)

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 14 — Fasc. 2 — 1955

SUI GRUPPI ORTOGONALI NEGLI SPAZI A TRE, QUATTRO, CINQUE DIMENSIONI *

DI GIUSEPPE ARCIDIACONO
Roma, Italia

1. Introduzione. Nella sua «Teoria degli universi fisici» [1], il FANTAPPIÉ ha messo in rilievo la importanza che presenta per la fisica lo studio dei gruppi delle rotazioni. Difatti, accanto al gruppo delle rotazioni dello spazio a tre dimensioni Os_3^3, in fisica si é incontrato il gruppo delle rotazioni dello spazio a quattro dimensioni (a 6 parametri) Os_4^6, il quale ha, dal punto di vista complesso, la stessa struttura del gruppo di LORENTZ ristretto Lz_{3+1}^6, mentre recentemente il FANTAPPIÉ ha mostrato che il gruppo di LORENTZ esteso Lz_{3+1}^{10}, può considerarsi come caso limite del *gruppo finale* Fn_{3+1}^{10} [2], il quale é semplice, ed ha la stessa struttura complessa del gruppo delle rotazioni dello spazio a cinque dimensioni Os_5^{10}.

Scopo del presente lavoro é quello di determinare esplicitamente le trasformazioni finite, in parametri canonici ortogonali dei gruppi Os_3^3, Os_4^6, Os_5^{10}.

2. Metodo adottato per il calcolo delle matrici e^A. É noto [3] che le trasformazioni finite del gruppo delle rotazioni in un S_n, si possono costruire a partire da una matrice *emisimmetrica* A di ordine n, nel seguente modo:

$$\mathbf{x}' = e^{A}\,\mathbf{x} \tag{2.1}$$

Gli $\dfrac{n(n-1)}{2}$ elementi distinti della matrice A si possono considerare come parametri canonici ortogonali della trasformazione (1), anzi formano un *bivettore* relativo al gruppo stesso [4].

La determinazione delle trasformazioni finite, in parametri canonici ortogonali, dei gruppi Os_3^3, Os_4^6, Os_5^{10}, si riduce quindi alla «valutazione» della funzione di matrice e^A, con A matrice emisimmetrica di ordine tre, quattro, cinque.

---

* Ricevuto il 13 Juglio 1955.

Come é noto dalla teoria delle matrici [5], se K é una qualunque matrice quadrata di ordine n, la funzione $g(\mathrm{K})$ può sempre scriversi sotto forma di polinomio nelle potenze di K:

$$g(\mathrm{K}) = g_0 \mathrm{I} + g_1 \mathrm{K} + \cdots + g_{n-1} \mathrm{K}^{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} g_s \mathrm{K}^s \tag{2.2}$$

anzi, in un recente lavoro [6], il FANTAPPIÉ servendosi della sua teoria dei funzionali analitici, ha dato una formola che permette di calcolare i coefficienti g_s, a partire dalla equazione caratteristica della matrice K e dalle sue radici caratteristiche.

Ma, allorché ci interessa scrivere per disteso la matrice $g(\mathrm{K})$ (ed é questo il nostro caso), lo sviluppo (**2**) risulta poco vantaggioso, perché le potenze di K, non appena l'esponente cresce, risultano delle matrici ad elementi assai complicati.

Per prima cosa quindi dimostreremo che una $g(\mathrm{K})$ può pure scriversi come una combinazione lineare di certe matrici Γ_s, costruibili a partire dai complementi algebrici della matrice $\mathrm{K} - \alpha \mathrm{I}$:

$$g(\mathrm{K}) = h_0 \Gamma_0 + h_1 \Gamma_1 + \cdots + h_{n-1} \Gamma_{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} h_s \Gamma_s . \tag{2.3}$$

Come vedremo in questo lavoro, le matrici Γ_s (a differenza delle matrici K^s) sono molto più semplici, ed i coefficienti h_s risultano più semplici dei corrispondenti g_s.

Per dimostrare la (**3**) osserviamo che nel lavoro [6] del FANTAPPIÉ, viene ricordata la sua formula che ci dà gli elementi g_{rs} della matrice $g(\mathrm{K})$:

$$g_{rs} = \mathrm{F}_{rs}[g(\lambda)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathrm{C}} u_{rs}(\lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda \tag{2.4}$$

dove la curva C di integrazione é una curva chiusa (separatrice) della sfera complessa, che lascia all'interno tutti i punti dove le $u_{rs}(\lambda)$ (indicatrici emisimmetriche) sono singolari, e lascia all'esterno tutti i punti singolari di $g(\lambda)$.

Ma se indichiamo con $\mathrm{D}(\alpha)$ il determinante della matrice $\mathrm{K} - \alpha \mathrm{I}$, e con $\mathrm{D}_{sr}(\alpha)$ il complemento algebrico nella stessa matrice, dell'elemento della riga s e della colonna r, possiamo scrivere:

$$u_{rs}(\alpha) = - \frac{\mathrm{D}_{sr}(\alpha)}{\mathrm{D}(\alpha)} .$$

Poiché $D_{sr}(\alpha)$ é un polinomio di grado $n-1$ (al più) nelle α, si potrà scrivere nel seguente modo:

(2.5) $$D_{sr}(\alpha) = (-1)^{n-1}\{\gamma_{sr}^{(0)}\alpha^{n-1} - \gamma_{sr}^{(1)}\alpha^{n-2} + \cdots \pm \gamma_{sr}^{(n-1)}\}.$$

Se allora introduciamo le n matrici:

(2.6) $$\boxed{(\Gamma_i)_{sr} = \gamma_{sr}^{(i)}}$$

potremo sviluppare la matrice trasposta $\Gamma(\alpha)$ della matrice aggiunta (di elementi $D_{sr}(\alpha)$), nel seguente modo:

(2.7) $$\Gamma(\alpha) = [D_{sr}(\alpha)] = (-1)^{n-1}(\alpha^{n-1}\Gamma_0 - \alpha^{n-2}\Gamma_1 + \cdots \pm \Gamma_{n-1}) = \\ = \sum_{s=0}^{n-1}(-\alpha)^{n-s-1}\Gamma_s$$

e quindi, per la (4):

(2.8) $$g(K) = F[g(\lambda)] = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\lambda)}{D(\lambda)} g(\lambda)\,d\lambda = \\ = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{n-1}\Gamma_s\int_C \frac{(-\lambda)^{n-s-1} g(\lambda)\,d\lambda}{D(\lambda)} = \sum_{s=0}^{n-1} h_s \Gamma_s$$

dove si é posto:

(2.9) $$h_s = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(-\lambda)^{n-s-1} g(\lambda)\,d\lambda}{D(\lambda)}.$$

Mas, se si ha:

(2.10) $$\frac{1}{D(\lambda)} = \sum_{jl}\frac{c_{jl}}{(\lambda - \rho_i)^{l+1}}$$

sostituendo nella precedente, e ricordando la formola di Cauchy, otteniamo:

(2.11) $$\boxed{h_s = -\sum_{jl}\frac{c_{jl}}{l!}\{(-\lambda)^{n-s-1} g(\lambda)\}^{(l)}_{\lambda=\rho_i}}$$

In particolare, se le radici ρ_i sono tutte semplici:

(2.12) $$\boxed{h_s = -\sum_j (-\rho_j)^{n-s-1} g(\rho_j)\, c_j}$$

Le due semplicissime formole (11), (12), ci permettono di calcolare i coefficienti dello sviluppo (3).

Vediamo adesso quale legame passa tra le matrici Γ_s e le K^s. A questo scopo osserviamo che il prodotto di una matrice per la trasposta della sua aggiunta, dà la matrice $D(\alpha) \cdot I$:

(2.13) $$(K - \alpha I) \cdot \Gamma = D(\alpha) \cdot I$$

che si può scrivere, per la (7):

$$(K - \alpha I)\left(\sum_{s=0}^{n-1} (-\alpha)^{n-s-1} \Gamma_s\right) = \left\{(-\alpha)^n + \sum_{s=0}^{n-1} b_{s+1}(-\alpha)^{n-s-1}\right\} I$$

dove con b_s si sono indicati i coefficienti del polinomio $D(\alpha)$. Ne segue:

(2.14) $$\sum_{s=0}^{n-1} (-\alpha)^{n-s-1} K \Gamma_s + \sum_{s=0}^{n-1} (-\alpha)^{n-s} \Gamma_s = \\ = \left\{(-\alpha)^n + \sum_{s=0}^{n-1} b_{s+1}(-\alpha)^{n-s-1}\right\} I$$

Confrontando i coefficienti della potenza $(-\alpha)^{n-s-1}$, otteniamo:

$$K \Gamma_s + \Gamma_{s+1} = b_{s+1} I$$

cioé:

(2.15) $$\boxed{\Gamma_{s+1} = b_{s+1} I - K \Gamma_s}$$

mentre, confrontando i coefficienti di $(-\alpha)^n$, la (14) ci porge:

(2.16) $$\boxed{\Gamma_0 = I} \cdot$$

Così, per es. nel caso in cui la matrice K é emisimmetrica, avendosi $b_{2s+1} = 0$, si ottiene:

(2.17) $$\left\{\begin{aligned} \Gamma_0 &= I \\ -\Gamma_1 &= K \\ \Gamma_2 &= K^2 + b_2 I \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} -\Gamma_3 &= K^3 + b_2 K \\ \Gamma_4 &= K^4 + b_2 K^2 + b_4 I \\ &\dots \end{aligned}\right.$$

sostituendo le (17) nella (3), possiamo ottenere e^K come polinomio nelle K^s, e viceversa.

3. Le trasformazioni del gruppo delle rotazioni dello S_3. Tale gruppo Os_3^3, ha tre parametri canonici ortogonali, che indicheremo con r_1, r_2, r_3. La matrice infinitesima sarà allora la seguente:

(3.1) $$R = \begin{bmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{bmatrix}$$

cui corrisponde la equazione caratteristica:

$$|\mathrm{R} - \alpha \mathrm{I}| = -\alpha^3 - \mathbf{r}^2 \alpha = 0 \tag{3.2}$$

dove si é posto:

$$\mathbf{r}^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \tag{3.3}$$

e le radici caratteristiche saranno:

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = ir; \quad \alpha_3 = -ir. \tag{3.4}$$

Applicando il metodo esposto al n° 2, troviamo com semplici calcoli:

$$c_0 = -1/r^2; \quad c_1 = c_2 = 1/2r^2. \tag{3.5}$$

Poiché, nel nostro caso, le radici caratteristiche sono semplici, applicando la (2.12), troviamo per la matrice e^{R} che rappresenta le transformazioni finite del gruppo, in parametri canonici ortogonali, la seguente espressione:

$$e^{\mathrm{R}} = \frac{1 - \cos r}{r^2} \Gamma_2 - \frac{\sin r}{r} \Gamma_1 + \cos r \, \Gamma_0 \tag{3.6}$$

mentre le matrici Γ_i si calcolano subito mediante la formola ricorrente (2.15) e sono date da:

$$\Gamma_0 = \mathrm{I}; \quad \Gamma_1 = -\mathrm{R}; \quad \Gamma_2 = [r_i r_k]. \tag{3.7}$$

Con facili calcoli si trova pure che:

$$\frac{e^{\mathrm{R}} - \mathrm{I}}{\mathrm{R}} = \frac{r - \sin r}{r^3} \Gamma_2 + \frac{1 - \cos r}{r^2} \Gamma_1 + \frac{\sin r}{r} \Gamma_0 . \tag{3.8}$$

4. Le trasformazioni del gruppo delle rotazioni dello S_4. Tale gruppo, Os_4^6 ha sei parametri. Detti $r_1, r_2, r_3; v_1, v_2, v_3$, i sei parametri canonici ortogonali, la matrice infinitesima si può escrivere così:

$$\mathrm{L} = \left\| \begin{array}{c|ccc} 0 & -v_1 & -v_2 & -v_3 \\ \hline v_1 & 0 & r_3 & -r_2 \\ v_2 & -r_3 & 0 & r_1 \\ v_3 & r_2 & -r_1 & 0 \end{array} \right\| . \tag{4.1}$$

La equazione caratteristica di tale matrice é:

$$\Delta(\alpha) = \alpha^4 + \alpha^2 (\mathbf{r}^2 + \mathbf{v}^2) + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2 \tag{4.2}$$

dove si sono indicati con $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ i vettori di componenti r_i e v_i $(i = 1, 2, 3)$.

Poiché le radici di $\Delta(\alpha)$, sono tutte immaginarie pure, possiamo indicarle con:

$$(4.3)\qquad \alpha_1 = i\rho\,; \quad \alpha_2 = -i\rho\,; \quad \alpha_3 = i\rho'\,; \quad \alpha_4 = -i\rho'$$

da cui segue:

$$(4.4)\qquad c_1 = -c_2 = \frac{1}{2i\rho(\rho^2-\rho'^2)}\,; \quad -c_1' = c_2' = \frac{1}{2i\rho'(\rho^2-\rho'^2)}$$

e quindi.

$$(4.5)\qquad e^{L} = h_0\Gamma_0 + h_1\Gamma_1 + h_2\Gamma_2 + h_3\Gamma_3$$

i coefficienti h_i si calcolano con la (2.12):

$$(4.6)\qquad \begin{cases} (\rho^2-\rho'^2)h_0 = \rho^2\cos\rho - \rho'^2\cos\rho' \\ (\rho^2-\rho'^2)h_1 = \rho'\sin\rho' - \rho\sin\rho \\ (\rho^2-\rho'^2)h_2 = \cos\rho' - \cos\rho \\ (\rho^2-\rho'^2)h_3 = \dfrac{\sin\rho}{\rho} - \dfrac{\sin\rho'}{\rho'} \end{cases}$$

le matrici Γ_i si calcolano invece con la (2.15). Fatti i calcoli, si trova:

$$(4.7)\qquad \Gamma_0 = \mathrm{I}\,; \quad \Gamma_1 = -\mathrm{L}$$

$$(4.8)\qquad \Gamma_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathbf{r}^2 & -(\mathbf{r}\wedge\mathbf{v})_1 & -(\mathbf{r}\wedge\mathbf{v})_2 & -(\mathbf{r}\wedge\mathbf{v})_3 \\ \hline -(\mathbf{r}\wedge\mathbf{v})_1 & \mathbf{v}^2+r_1^2-v_1^2 & r_1r_2-v_1v_2 & r_1r_3-v_1v_3 \\ -(\mathbf{r}\wedge\mathbf{v})_2 & r_1r_2-v_1v_2 & \mathbf{v}^2+r_2^2-v_2^2 & r_2r_3-v_2v_3 \\ -(\mathbf{r}\wedge\mathbf{v})_3 & r_1r_3-v_1v_3 & r_2r_3-v_2v_3 & \mathbf{v}^2+r_3^2-v_3^2 \end{array}\right]$$

$$(4.9)\qquad \Gamma_3 = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & -r_1 & -r_2 & -r_3 \\ \hline r_1 & 0 & v_3 & -v_2 \\ r_2 & -v_3 & 0 & v_1 \\ r_3 & v_2 & -v_1 & 0 \end{array}\right] = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\Gamma_1^*$$

dove si é indicato con Γ_1^* il bivettore *duale* del bivettore Γ_1 [7].

Così abbiamo calcolato esplicitamente la matrice che rappresenta le trasformazioni del gruppo Os_4^6, in parametri canonici ortogonali.

5. Le trasformazioni del gruppo delle rotazioni dello S_5. Detti $r_1, r_2, r_3; v_1, v_2, v_3; t_1, t_2, t_3; t_0$, i dieci parametri canonici ortogonali del gruppo Os_5^{10}, la matrice infinitesima sarà data da:

$$\text{(5.1)}\qquad \mathrm{F} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -v_1 & -v_2 & -v_3 & -t_0 \\ \hline v_1 & 0 & r_3 & -r_2 & -t_1 \\ v_2 & -r_3 & 0 & r_1 & -t_2 \\ v_3 & r_2 & -r_1 & 0 & -t_3 \\ \hline t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & 0 \end{array}\right]$$

La equazione caratteristica di questa matrice, é

$$\text{(5.2)}\qquad \Delta(\alpha) = -\alpha^5 - b_2\alpha^3 - b_4\alpha = 0$$

con

$$\text{(5.3)}\qquad \begin{cases} b_2 = \mathbf{r}^2 + \mathbf{v}^2 + \mathbf{t}^2 + t_0^2 \\ b_4 = (\mathbf{v}\times\mathbf{r})^2 + (\mathbf{t}\times\mathbf{r})^2 + (t_0\mathbf{r} + \mathbf{t}\wedge\mathbf{v})^2 \end{cases}$$

Le radici caratteristiche sono le seguenti:

$$\text{(5.4)}\qquad \alpha_1 = 0;\quad \alpha_2 = -\alpha_3 = i\rho;\quad \alpha_4 = -\alpha_5 = i\rho'$$

da cui si ricava:

$$\text{(5.5)}\qquad c_0 = \frac{1}{\rho^2\rho'^2};\quad c_1 = c_2 = -\frac{1}{2\rho^2(\rho^2-\rho'^2)};\quad c_1' = c_2' = \frac{1}{2\rho^2(\rho^2-\rho'^2)}$$

Possiano quindi scrivere:

$$\text{(5.6)}\qquad e^F = h_0\Gamma_0 + h_1\Gamma_1 + h_2\Gamma_2 + h_3\Gamma_3 + h_4\Gamma_4$$

e le h_s si calcolano con la (2, 12):

$$\text{(5.7)}\qquad \begin{cases} (\rho^2-\rho'^2)h_0 = \rho^2\cos\rho - \rho'^2\cos\rho' \\ (\rho^2-\rho'^2)h_1 = \rho\sin\rho - \rho'\sin\rho' \\ (\rho^2-\rho'^2)h_2 = \cos\rho' - \cos\rho \\ (\rho^2-\rho'^2)h_3 = \dfrac{\sin\rho'}{\rho'} - \dfrac{\sin\rho}{\rho} \\ (\rho^2-\rho'^2)h_4 = \dfrac{\cos\rho - 1}{\rho^2} + \dfrac{1-\cos\rho'}{\rho'^2} \end{cases}$$

Come si vede, le h_s così ottenute, sono più semplici e più simmetriche delle corrispondenti g_s calcolate dal FANTAPPIÉ [6]: Usando le matrici Γ_i, nello sviluppo di e^F, si ha inoltre il vantaggio che le matrici Γ_i sono estremamente più semplici delle matrici F^i (potenze della matrice F). Difatti esse sono:

$$\text{(5.8)}\qquad \Gamma_0 = \mathrm{I};\quad \Gamma_1 = -\mathrm{F}$$

$$(5.9)\qquad \Gamma_2 = \left[\begin{array}{c|ccc|c} \mathfrak{t}^2+\mathfrak{r}^2 & a_1 & a_2 & a_3 & \mathfrak{v}\times\mathfrak{t} \\ \hline a_1 & p_{11} & p_{12} & p_{13} & b_1 \\ a_2 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & b_2 \\ a_3 & p_{31} & p_{32} & p_{33} & b_3 \\ \hline \mathfrak{v}\times\mathfrak{t} & b_1 & b_2 & b_3 & \mathfrak{v}^2+\mathfrak{r}^2 \end{array}\right]$$

dove si é posto:

$$(5.10)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = -(t_0\mathfrak{t} + \mathfrak{r}\wedge\mathfrak{v})\,;\ \mathfrak{b} = -(t_0\mathfrak{v} + \mathfrak{r}\wedge\mathfrak{t}) \\ p_{ik} = (\mathfrak{t}^2 + \mathfrak{v}^2 + t_0^2)\,\delta_{ik} - v_i v_k - t_i t_k + r_i r_k \end{cases}$$

e δ_{ik} é il tensore di KRONECKER. Per scrivere le altre due matrici Γ_3 e Γ_4, é opportuno fare le posizioni:

$$(5.11)\qquad \begin{cases} \bar{y}_0 = -(\mathfrak{r}\times\mathfrak{t})\,;\ \bar{\mathfrak{y}} = (t_0\mathfrak{r} + \mathfrak{t}\wedge\mathfrak{v})\,;\ \bar{y}_4 = -(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}) \\ \mathfrak{c} = -\mathfrak{r}\,\bar{y}_4 + \bar{\mathfrak{y}}\wedge\mathfrak{t}\,;\ \mathfrak{d} = -\mathfrak{r}\,\bar{y}_0 - \bar{\mathfrak{y}}\wedge\mathfrak{v}\,;\ \mathfrak{e} = t_0\bar{\mathfrak{y}} - \bar{y}_0\mathfrak{t} - \bar{y}_4\mathfrak{v} \end{cases}$$

dopo di che potremo scrivere:

$$(5.12)\qquad \Gamma_3 = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -\bar{\mathfrak{y}}\times\mathfrak{r} \\ \hline c_1 & 0 & e_3 & -e_2 & -d_1 \\ c_2 & -e_3 & 0 & e_1 & -d_2 \\ c_3 & e_2 & -e_1 & 0 & -d_3 \\ \hline \bar{\mathfrak{y}}\times\mathfrak{r} & d_1 & d_2 & d_3 & 0 \end{array}\right]$$

ed infine:

$$(5.13)\qquad \Gamma_4 = [\,\bar{y}_i\bar{y}_k\,] \qquad (i\,,k = 0\,,1\,,\cdots,4)$$

Le cinque matrici precedenti possono scriversi in forma più compatta, a partire dal bivettore x_{ik} (le cui componenti sono gli elementi della matrice emisimmetrica F). Difatti, da questo bivettore si può costruire un 4-vettore nel seguente modo:

$$y_{iklm} = 3\,x_{[ik}\,x_{lm]} = x_{i<k}\,x_{lm>}\ \text{(1)}$$

e prendendo i «duali» di x_{ik} e di y_{iklm}, si ricavano un trivettore ed un vettore [7]:

$$(5.14)\qquad \bar{y}_{ijk} = \pm x_{lm} \qquad \bar{y}_i = \pm y_{ijklm}$$

dove vale il segno più o meno, a secondo che la permutazione $ijklm$ é pari o dispari rispetto alla 1 2 3 4 5.

Il vettore $\bar{y}_i$ ha le componenti:

$$(5.15)\qquad \bar{y}_0 = -(\mathfrak{r}\times\mathfrak{t})\,;\quad \bar{\mathfrak{y}} = (t_0\mathfrak{r} + \mathfrak{t}\wedge\mathfrak{v})\,;\quad \bar{y}_4 = -(\mathfrak{v}\times\mathfrak{r})$$

---

(1) Le parentesi $< >$ indicano una permutazione ciclica degli indici.

Ció posto, é facile verificare che le cinque matrici Γ_i si possono costruire nel seguente modo:

$$\left\{\begin{array}{c} \Gamma_0 = [\delta_{ik}]; \qquad \Gamma_1 = -[x_{ik}] \\ 2\Gamma_2 = [\bar{y}_{irs}\,\bar{y}^{rs}{}_{\cdot\cdot k}]; \qquad \Gamma_3 = [\bar{y}_r\,\bar{y}^r{}_{ik}] \\ \Gamma_4 = [\bar{y}_i\,\bar{y}_k] \end{array}\right. \tag{5.16}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] L. Fantappié, *Caratterizzazione analitica della grandezze della meccanica quantica.* «Rend. Acc. Lincei», serie 8.° **12**, fasc. 3 (1952); Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico «Rend. Acc. Lincei» serie 8°, **12**, fasc. 5 (1952).

[2] ———, *Su una nuova teoria di «relatività finale»* Rend. Acc. Lincei, serie 8.°, **17**, fasc. 5 (1954)

[3] L. Bianchi, *Teoria dei gruppi continui, finiti di trasformazioni*, Bologna, Zanichelli, 1928.

[4] É. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs*, **1**, Actualités Scientifiques n.° 643, Paris, Hermann, 1938.

[5] Vedi per es. H. Schwérdtfeger, *Les fonctions de matrices.* Actualités Scientifiques, n.° 649, Paris, Hermann, 1938.

[6] L. Fantappié, *Sulle funzioni di una matrice*, Anais da Academia Brasileira de Ciências, n.° 1, **26**, 1954.

[7] J. A. Schouten, *Tensor analysis for physicists*, Oxford, 2.ª edizione, 1954.