PORTUGALIAE MATHEMATICA

VOLUME 19
1960

Publicação subsidiada por
Publication subventionnée par — Publication sponsored by
JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA, SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA
e FUNDAÇÃO CALOUSTE GULBENKIAN

Edição de
«GAZETA DE MATEMÁTICA, LDA.»

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Rua Nova da Trindade, 1, 5.º-S
LISBOA-2 (PORTUGAL)

HERMANN & C.ie, Editeurs
6, Rue de la Sorbonne
PARIS (5eme)

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 19 – Fasc. 3 – 1960

LA DIFFÉRENTIELLE AU SENS D'HADAMARD-FRÉCHET DANS LES ESPACES L VECTORIELS *

PAR SUSANA FERNANDEZ LONG DE FOGLIO
Instituto de Física S. C. de Bariloche, Universidad de Cuyo — Rep. Argentina.

1 Introduction. L'extension de la théorie de la différentielle pour les applications entre deux espaces abstraits peut se faire en partant de la définition classique de STOLZ ou en prenant comme point de départ la définition de différentielle donnée par M. HADAMARD (1) pour les fonctions réelles de l'analyse classique.

La théorie de M. HADAMARD á été étendue par M. M. FRÉCHET (2), KY FAN (3) et BALANZAT (4) aux applications entre deux espaces vectoriels topologiques dans le cas où la topologie était définie para l'intermédiaire d'une distance.

Nous nous propossons maintenant d'étendre cette théorie au cas des applications entre deux espaces L au sens de M. FRÉCHET, qui sont en plus des espaces vectoriels sur le corps des nombres réels.

Pour faciliter la lecture nous allons résumer les propriétés des espaces L en suivant et complétant l'exposé de M. KURATOWSKI (6).

Un espace L est un ensemble E d'éléments arbitraires dans lequel sont définies les suites convergentes d'éléments de l'espace, c'est à dire que l'on considère certaines suites $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ auxquelles l'on fait correspondre un élément unique x de E, la

* Reçu le 26 Décembre 1959.

(1) J. HADAMARD: *La notion de différentielle dans l'enseignement* (Scripta Univ. Ab. Hierosolymitanarum, Jerusalem, 1923).

(2) M. FRECHET: *Sur la notion de différentielle* (Journ. de Math., **16**, 1937).

(3) KY FAN: *Sur quelques notions fondamentales de l'Analyse générale* (Journ. de Math., **21**, 1942).

(4) M. BALANZAT: *La diferencial en los espacios métricos afines* (Matematicae Notae, **9**, 1949).

(5) Nous avons publié un résumé des résultats exposés dans cet article dans une note aux C. R. (Séance du 23 Février 1959).

(6) C. KURATOWSKI: Topologie, vol. I, Chap. 2 § 14.

limite de la suite, $x = \lim x_n$, de façon que les conditions suivantes soient réalisées:

1.° Si $x = \lim x_n$, on a $x = \lim x_{m_i}$ pour toute sous-suite de la suite x_n.

2.° Si pour $n > n_0$, $x_n = x$, on a $x = \lim x_n$.

3.° Si la suite x_n ne converge pas vers x, elle contient une soussuite x_{m_n} dont aucune suite partielle ne converge vers x.

L'adhérence $\overline{X}$ d'un ensemble X est définie par la condition: $x \in \overline{X}$ si et seulement s'il existe une suite x_n de points de X telle que $x = \lim x_n$. L'adhérence jouit des propriétés suivantes:

$$(1) \qquad X \subset \overline{X}; \quad \overline{\emptyset} = \emptyset; \quad \overline{\{x\}} = \{x\}; \quad \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}.$$

Par contre la propiété $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$ peut ne pas être vérifiée. En conséquence les espaces L ne sont pas des espaces topologiques au sens de Bourbaki.

La famille $\mathcal{C}$ des *ensembles fermés* est définie par la condition: $X \in \mathcal{C}$ si et seulement si $X = \overline{X}$; on a les propriétés suivantes:

$$(2) \qquad \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{C}; \ E \in \mathcal{C}; \ \{x\} \in \mathcal{C}; \ \text{si } X \in \mathcal{C} \text{ et } Y \in \mathcal{C}, \ X \cup Y \in \mathcal{C}; \\ \qquad\qquad \text{Si } X_\lambda \in \mathcal{C}, \ \bigcap X_\lambda \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

$\overline{X}$ est égal à l'intersection des ensembles fermés contenant X, si et seulement si $\overline{X} \in \mathcal{C}$.

La donnée de la famille $\mathcal{C}$ ne suffit pas à caractériser l'espace.

Les *ensembles ouverts* sont les complémentaires des ensembles fermés.

L'intérieur I(X) d'un ensemble X est par définition $I(X) = C(\overline{CX})$.

Les propriétes des ensembles ouverts et de l'intérieur d'un ensemble se déduissent par dualité des propriétes des ensembles fermés et de celles de l'adhérence d'un ensemble.

La *famille des voisinages* $\mathcal{V}(x)$ d'un point x, est définie par la condition:

$$(3) \qquad V \in \mathcal{V}(x) \text{ si et seulement si } x \notin \overline{CV}.$$

On a les propriétés suivantes:

$$(4) \qquad V \in \mathcal{V}(x) \text{ si et seulement si } x \in I(V).$$

$$(5) \qquad \text{Si } V \in \mathcal{V}(x), \ x \in V.$$

(6) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \supset V$, $W \in \mathcal{V}(x)$.

(7) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap W \in \mathcal{V}(x)$.

Il peut arriver qu'un voisinage V d'un point x ne contienne aucun ensemble ouvert contenant x.

Soit $\mathcal{V}_0(x)$ un système fondamental de voisinages de x. On a les propriétés suivantes:

(8) $x \in \overline{X}$ si et seulement si $V \cap X \neq \emptyset$ pour tout $V \in \mathcal{V}_0(x)$.

(9) $x \in I(X)$ si et seulement s'il existe $V \in \mathcal{V}_0(x)$ tel que $V \subset X$.

(10) $x = \lim x_n$ si et seulement si pour tout $V \in \mathcal{V}_0(x)$, on peut trouver $n_0(V)$ tel que pour tout $n > n_0$, $x_n \in V$.

Une application $f(x)$ entre deux espaces L est continue au point x_0, si et seulement si pour toute suite x_n telle que $x_0 = \lim x_n$, on a $f(x_0) = \lim f(x_n)$.

Le produit cartésien $Z = X \times Y$ de deux espaces L devient un espace L, en admettant que $z = (x, y)$ est limite de la suite $z_n = (x_n, y_n)$ si et seulement si $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$. Avec cette définition les voisinages de z sont les ensembles contenant le produit cartésien d'un voisinage de x pour un voisinage de y.

Les espaces que nous considérerons auront, en plus de la structure topologique définie par les suites convergentes, une structure d'espace vectoriel de façon que les deux opérations de somme de vecteurs et de multiplication pour un scalaire soient des opérations continues.

Dans un espace vectoriel L, il existe un système fondamental $\mathcal{V}_0$ de voisinages du vecteur nul θ tel que:

(11) Si $V \in \mathcal{V}_0$, il existe $W \in \mathcal{V}_0$ tel que $W + W \subset V$.

(12) Pour tout $V \in \mathcal{V}_0$ et tout nombre α tel que $|\alpha| \leqq 1$, il existe $W \in \mathcal{V}_0$, tel que $\alpha W \subset V$.

(13) Pour tout $x \in E$ et pour tout $V \in \mathcal{V}_0$, il existe un nombre α tel que $x \in \alpha V$.

Toutes les propriétés que nous venons d'enoncer sont connues ou se déduisent aisément des propriétés connues.

Comme exemple d'un espace L vectoriel non métrisable, nous avons l'ensemble des fonctions $f(x)$ réelles de variable réelle, où une suite f_n est considérée comme convergeant vers

f si la suite numérique $f_n(a)$ converge vers $f(a)$ en chaque point a.

Les espaces des fonctions utilisés dans la théorie des distributions de M. SCHWARTZ, peuvent être introduits comme des espaces L.

2. Définition de la différentielle.

La définition de la différentielle au sens d'HADAMARD se fait d'abord pour les applications $x = g(\lambda)$ de variable réelle.

DÉFINITION 1. *Une application* $\mathrm{x} = \mathrm{g}(\lambda)$, *où* λ *est un nombre réel et* x *est un point d'un espace* L *vectoriel* E, *est dite différentiable au point* λ_0, *s'il existe* $\mathrm{g}'(\lambda_0) \in \mathrm{E}$, *tel que:*

$$\frac{g(\lambda_0 + \Delta\lambda) - g(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = g'(\lambda_0) + \mu(\Delta\lambda) \tag{14}$$

avec la conditiou que pour toute suite $\Delta\lambda_n$, *telle que* $\lim \Delta\lambda_n = 0$, *on ait* $\lim \mu(\Delta\lambda_n) = \theta$.

A partir de cette définition nous pouvons maintenant définir la différentielle dans le cas général.

DÉFINITION 2. *Une application* $\mathrm{y} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$, *où* x *et* y *appartiennent respectivement à deux espaces* L *vectoriels* E *et* F, *est différentiable au point* x_0, *s'il existe une application linéaire et continue,* $\mathrm{y} = \mathrm{U}(\mathrm{x})$ *(la différentielle au point* x_0*) telle que, quelle que soit l'application* $\mathrm{x} = \mathrm{g}(\lambda), \lambda$ *réel, différentiable en* λ_0, *avec* $\mathrm{x}_0 = \mathrm{g}(\lambda_0)$, *l'application* $\Phi(\lambda) = \mathrm{f}[\mathrm{g}(\lambda)]$ *soit différentiable et* $\Phi'(\lambda_0) = \mathrm{U}[\mathrm{g}'(\lambda_0)]$.

Plus tard nous verrons qu'il faudra, dans le cas le plus général, ajouter la continuité de $f(x)$ en x_0.

Nous avons ici deux définitions pour le applications $\mathrm{x} = \mathrm{g}(\lambda), \lambda$ *réel, et il faut prouver qu'elles coincident.*

Pour cela nous prenons $g(\lambda)$ différentiable au point λ_0 avec la définition 1 et nous allons voir qu'elle est aussi différentiable avec la définition 2 et que $\mathrm{U}(\lambda) = \lambda g'(\lambda_0)$.

Prenons la fonction réelle de variable réelle $\lambda = h(t)$, dérivable en t_0, avec $\lambda_0 = h(t_0)$, et soit $\Phi(t) = g[h(t)]$. Nous avons:

$$\frac{\Phi(t_0+\Delta t)-\Phi(t_0)}{\Delta t}=\frac{g[h(t_0+\Delta t)]-g[h(t_0)]}{\Delta t}.$$

Pour la différentiabilité de $g(\lambda)$ on a:

$$\frac{\Phi(t_0+\Delta t)-\Phi(t_0)}{\Delta t}=g'(\lambda_0)\,\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}$$
$$+\frac{h(t_0+\Delta t)-h(t_0)}{\Delta t}\,\mu\,[h(t_0+\Delta t)-h(t_0)]$$

Et à cause de la continuité et dérivabilité de $h(t)$, de la dérivabilité de $g(\lambda)$, et de la continuité du produit par un scalaire, nous avons:

$$\frac{\Phi(t_0+\Delta t)-\Phi(t_0)}{\Delta t}=g'(\lambda_0)\,\mathrm{h}'(t_0)+\mu_1(\Delta t)$$

avec $\lim \mu_1(\Delta t_n)=\theta$, si $\lim \Delta t_n=\theta$.

Réciproquement: supposons $f(x), x$ réel, différentiable en x_0 avec la définition 2. Si nous prenons la fonction $g(\lambda)=\lambda$ et, si nous appliquons la définition, nous avons que $f(x)$ est différentiable avec la définition 1 et l'on a $f'(x_0)=\mathrm{U}(1)$.

3. Linéarité de la différentielle

Soit $f(x)=a f_1(x)+b f_2(x)$, f_1 et f_2 différentiables au point x_0 avec des différentielles $\mathrm{U}_1(x)$ et $\mathrm{U}_2(x)$. Prenons la fonction $x=g(\lambda)$ avec les conditions de la définition 2. Nous avons en notant:

$$\Phi(\lambda)=f[g(\lambda)]\quad \Phi_1(\lambda)=f_1[g(\lambda)]\quad \Phi_2(\lambda)=f_2[g(\lambda)],$$
$$\frac{\Phi(\lambda_0+\Delta\lambda)-\Phi(\lambda_0)}{\Delta\lambda}=a\,\frac{\Phi_1(\lambda_0+\Delta\lambda)-\Phi_1(\lambda_0)}{\Delta\lambda}+b\,\frac{\Phi_2(\lambda_0+\Delta\lambda)-\Phi_2(\lambda_0)}{\Delta\lambda}$$
$$=a\,\mathrm{U}_1[g'(\lambda_0)]+b\,\mathrm{U}_2[g'(\lambda_0)]+a\,\mu_1(\Delta\lambda)+b\,\mu_2(\Delta\lambda).$$

donc $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *est aussi différentiable au point* x_0 *et sa différentielle est* $\mathrm{a}\,\mathrm{U}_1(\mathrm{x})+\mathrm{b}\,\mathrm{U}_2(\mathrm{x})$.

4. Unicité de la différentielle.

La différentielle est unique. En effet:

Supposons qu'il puisse exister une autre application linéaire et continue $\mathrm{V}(x)$ avec les mêmes propriétés que la différentielle $\mathrm{U}(x)$. Nous allons prouver que $\mathrm{U}(x)=\mathrm{V}(x)$.

Soit x un point quelconque de l'espace et considérons la fonction de variable réelle $g(\lambda) = x_0 + (\lambda - \lambda_0) x$. L'on a:

$$g(\lambda) - g(\lambda_0) = (\lambda - \lambda_0) x, \text{ donc } g'(\lambda_0) = x.$$

Comme $U(x)$ et $V(x)$ vérifient les conditions de la définition 2, l'on a:

$$U(x) = U[g'(\lambda_0)] = V[g'(\lambda_0)] = V(x)$$

pour tout x de l'espace.

5. Continuité et différentiabilité.

Nous allons d'abord démontrer le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit* $y = f(x)$ *une application entre deux espaces L vectoriels* X *et* Y, *différentiable au point* x_0. *Nous supposons aussi qu'il existe un système fondamental dénombrale de voisinages de* x_0 *dans l'espace* X. *Avec ces hypothèses l'application* $f(x)$ *est continue au point* x_0.

Nous pouvons supposer, sans perdre la généralité $x_0 = \theta$ et $f(x_0) = \theta$.

Le théorème sera démontré si nous prouvons qu'une fonction $y = f(x)$, avec $\theta = f(\theta)$ non continue en θ n'est pas différentiable.

Si $f(x)$ n'est pas continue en θ, il existe une suite $a_n \in X$, telle que $\lim a_n = \theta$ et que la suite $f(a_n)$ ne converge pas vers θ.

De la suite a_n nous pouvons extraire une sous-suite b_n telle que $\lim b_n = \theta$, et que pour toute sous-suite b_{m_n}, la suite de points de Y, $f(b_{m_n})$ ne converge pas vers θ.

Soit $W_1, W_2, \cdots W_n, \cdots$ le système fondamental dénombrale de voisinages de θ dans X. En prenannt $V_n = W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cdots \cap W_n$, nous obtenons un autre système fondamental de voisinages de θ dans X qu'a la propriéte suivante:

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_n \supset \cdots. \tag{15}$$

Prenons m fixe quelconque. La suite $m \cdot b_n$ converge vers θ. Donc nous pouvons fixer m_n tel que $m \cdot b_{m_n} \in V_m$. Nous considérons maintenant la suite $c_m = b_{n_m}$. Cette suite a évidement les propriétés suivantes:

1.° $\lim c_m = \theta$.

2.° La suite $f(c_m)$ ne converge pas vers θ.

Appelons $d_m = m \cdot c_m$. On a alors:

3.° $\lim d_m = \theta$.

En effet, étant donné un V_n, pour $m > n$, on a $d_m = m \cdot c_m \in V_m \subset V_n$.

Nous construisons maintenant la fonction de variable réelle $g(\lambda)$ à valeurs dans X,

$$(16) \qquad g(\lambda) = \begin{cases} c_m \text{ pour } \lambda = 1/m \quad (m = 1, 2, \cdots) \\ \theta \text{ dans tous les autres points.} \end{cases}$$

Nous avons

$$(17) \qquad \frac{g(\lambda) - g(\theta)}{\lambda} \begin{cases} m \cdot c_m = d_m \text{ pour } \lambda = 1/m. \\ \theta \text{ dans tous les autres points.} \end{cases}$$

Comme $\lim d_m = \theta$, l'on déduit que $g(\lambda)$ est différentiable en θ et $g'(\theta) = \theta$.

Si $f(x)$ était différentiable, $\Phi(\lambda) = f[g(\lambda)]$ devrait être aussi différentiable et $\Phi'(\lambda) = U(\lambda) = \theta$. En conséquence pour $\lambda = 1/m$, on devrait avoir

$$\lim \frac{\Phi(1/m) - \Phi(\theta)}{1/m} = \theta.$$

Mais:

$$\frac{\Phi(1/m) - \Phi(\theta)}{1/m} = m f[g(1/m)] - m f[g(\theta)] = m f(c_m)$$

et si $\lim m \cdot f(c_m) = \theta$, par la continuité du produit par un scalaire, l'on aurait

$$\theta = \lim 1/m\, m \cdot f(c_m) = \lim f(c_m)$$

en contradiction avec la condition 3.°.

Le théorème est donc prouvé.

Dans la mémoire de Ky Fan (loc. cit. dans note 3, § 15), il est donné un exemple de fonction $f(x)$, définie dans un espace distancié affin, donc métrisable, différentiable et non continue. Cet exemple semblerait contredire le théorème que nous venons de démontrer, mais dans l'exemple de Ky Fan la différentielle de la fonction est linéaire, dans le sens de l'additivé, mais elle n'est pas continue.

Nous allons maintenant donner un exemple d'une application différentiable non continue. Pour cela nous allons construire un espace L particulier que nous appellerons l'espace R* (7).

6. L'espace R*.

Les points de l'espace R* sont les suites des nombres réels $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, 0, 0, \cdots)$ qui n'ont qu'un nombre fini de termes différents de zero.

L'espace R* devient un espace vectoriel sur le corps des nombres réels avec les définitions ordinaires d'addition de deux suites et du produit d'un nombre par une suite.

Pour introduire la topologie dans R* nous devons définir les suites convergentes. Nous dirons que la suite Q^m de vecteurs de R* converge vers Q si $Q^m - Q$ converge vers le vecteur nul θ. La convergence vers θ est définie de la façon suivante:

DÉFINITION 3. *La suite* $P_m = \{\alpha_n^m\}$ *converge vers* θ *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées:*

a) *Pour tout entier positif* n, *l'on a:* $\lim\limits_{m \to \infty} \alpha_n^m = 0$.

b) *Il existe un nombre* h, *réel* > 0, *tel que pour toute pair d'entiers* m, n *on ait:*

$$|\alpha_n^m| < h. \tag{18}$$

Il faut d'abord prouver qu'avec cette définition nous avons un espace L, c'est à dire que les conditions 1.°, 2.° et 3.° du § 1 sont vérifiées. Il nous suffira de considérer les suites convergeant vers le vecteur nul. La démonstration pour 1.° et 2.° est immédiate. Nous allons prouver la troisième.

Supposons que la suite P^m ne converge pas vers θ. Alors une des deux conditions de la définition 3 n'est pas vérifiée.

Si *a*) n'est pas verifiée, il existe un entier p tel que la suite des nombres réeles α_p^m ne converge pas, pour $m \to \infty$, vers zero. Il existe alors une sous-suite $\alpha_p^{m_i}$ dont aucune sous-suite converge vers zero et alors la suite P^{m_i} a la propriété de qu'aucune sous-suite ne converge vers le vecteur nul.

---

(7) L'espace R de FRÉCHET (Espaces abstrais p. 76) a les mêmes points que l'espace que nous avons appelé R*, mais les suites convergentes sont définies seulement par la propriété *a*) de la dêfinition 3.

Supposons maintenant que *a*) soit vérifiée et *b*) ne le soit pas. Alors, quelque soit h nous pouvons trouver deux entiers positifs n, m tels que $|\alpha_n^m| > h$.

Prenons $h = 1$; nous pouvons déterminer deux entiers m_1 et n_1 tels que $|\alpha_{n_1}^{m_1}| > 1$.

La suite P^{m_1+1}, $P^{m_1+2}, \cdots$ ne converge pas vers θ; comme elle vérifie *a*), elle ne peut pas vérifier *b*). Prenons $h = 2$; nous pouvons déterminer deux entiers m_2 et n_2, tels que $m_2 > m_1$ et $|\alpha_{n_2}^{m_2}| > 2$. En procédant ainsi de suite nous aurons deux suites,

$$m_1 < m_2 < \cdots < m_r < \cdots$$
$$n_1, n_2, \cdots, n_r, \;\cdots$$

telles que $|\alpha_{n_r}^{m_r}| > r$.

Prenons maintenant la suite des points $P^{m_1}, P^{m_2}, \ldots P^{m_r}, \ldots$ et soit $P^{m_{r_i}}$ une quelconque de ses sous-suites. Si h est un nombre réel positif nous pouvons prendre m_{r_i} avec la condition $r_i > h$ et nous avons

$$\left|\alpha_{n_{r_i}}^{m_{r_i}}\right| > r_i > h$$

et en conséquence la suite $P^{m_{r_i}}$ ne converge pas vers θ.

Nous avons donc prouvé que l'espace R* *est un espace* L.

Maintenant il nous faut prouver qu'il est un espace L vectoriel, c'est à dire la continuité des opérations de l'espace vectoriel.

La *continuité de l'addition* sera prouvé si nous démontrons que de $\lim P^m = \theta$ et $\lim Q^m = \theta$, l'on déduit $\lim P^m + Q^m = \theta$.

Soient

$$P^m = (\alpha_1^m, \cdots \alpha_n^m \cdots); \quad Q^m = (\beta_1^m \cdots \beta_n^m \cdots)$$

comme l'on a $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_n^m = 0$ et $\lim\limits_{m\to\infty} \beta_n^m = 0$, nous avons $\lim\limits_{m\to\infty} \alpha_n^m + \beta_n^m = 0$.

D'autre part ils existent h_1 et h_2 tels qu'on a pour tout m et tout n,

$$|\alpha_n^m| \leqq h_1 \quad |\beta_n^m| \leqq h_2 .$$

Donc, en prenant $h = h_1 + h_2$, l'on a:

$$|\alpha_n^m + \beta_n^m| \leqq h_1 + h_2, = h$$

c. q. f. d.

Il est connu que prouver la *continuité du produit pour un scalaire,* il suffit de prouver:

a) La continuité de $\varphi(a)=a\cdot \mathrm{P}$ dans le point $a=0$ et pour P fixe.

b) La continuté de $\varphi(\mathrm{P})=a\cdot \mathrm{P}$ dans le point $\mathrm{P}=\theta$ et pour a fixe.

c) La continuité de $\Phi(a,\mathrm{P})=a\cdot \mathrm{P}$ au point $(0,\theta)$.

Par conséquence nous devons prouver:

a') Si $\lim a_m=0$, l'on a $\lim a_m\cdot \mathrm{P}=\theta,\mathrm{P}$ fixe quelconque.

b') Si $\lim \mathrm{P}^m=\theta$, l'on a $\lim a\cdot \mathrm{P}^m=0$, a fixe quelconque.

c') Si $\lim a_m=0$ et $\lim \mathrm{P}^m=\theta$, l'on a $\lim a_m\cdot \mathrm{P}^m=\theta$.

Prouvons *a'*). Soit $\mathrm{P}=\{\alpha_n\}$ et considérons la suite $\mathrm{P}^m= = a_m\cdot \mathrm{P}=\{a_m\alpha_n\}$. Pour n fixe on a évidemment $\lim\limits_{m\to\infty} a_m\cdot\alpha_n=0$. L'ensemble des $\alpha_n\neq 0$ est fini; nous pouvons donc trouver un h_1 tel que $|\alpha_n|\leqq h_1$. La suite a_m est convergente, donc bornée, il existe en conséquence h_2 tel que $|a_m|\leqq h_2$. Donc, pour $h=h_1\cdot h_2$, $|a_m\alpha_n|\leqq h_1\cdot h_2=h$. c. q. f. d.

Prouvons *b'*). Soit $\mathrm{P}^m=\{\alpha_n^m\}$ et considérons la suite $a\cdot \mathrm{P}^m= =\{a\,\alpha_n^m\}$. Pour n fixe on a évidement $\lim\limits_{m\to\infty} a\cdot\alpha_n^m=0$. Il existe h_1 tel que $|\alpha_n^m|\leqq h_1$. Si nous prenons $h=a\cdot h_1$, nous avons $|a\cdot\alpha_n^m|\leqq a\cdot h_1=h$. c. q. f. d.

Prouvons *c'*) Soit $\mathrm{P}^m=\{\alpha_n^m\}$ et considérons la suite $a_m\cdot \mathrm{P}^m$. Pour n fixe il est évident que $\lim\limits_{m\to\infty} a_m\alpha_n^m=0$. Il existe h_1 tel que $|\alpha_n^m|\leqq h_1$. La suite a_m est convergente, donc bornée, en conséquence il existe h_2 tel que $|a_m|\leqq h_2$. Donc pour $h=h_1\cdot h_2$, $|a_m\alpha_n^m|\leqq h_1\cdot h_2=h$.

c. q. f. d.

7. Exemple d'application différentiable non continue.

Considérons dans l'espace R^* la suite des points P^m, définie par la condition que les composants α_n^m sont 0 si $m\neq n$ et 1 si $m=n$.

Nous allons prouver la propriété suivante:

Soit t_j *une suite de nombres réels telle que* $\lim|t_j|=\infty$ *et soit* P^{m_j} *une sous-suite de* P^m; *la suite* $t_j\cdot \mathrm{P}^{m_j}$ *n'est jamais convergente.*

En effet: soient $\alpha_n^{m_j}$ les termes de P^{m_j}. En prenant n fixe pour j plus grand qu'un j_0, l'on a $t_j\cdot\alpha_n^{m_j}=0$, donc si la suite

$t_j P^{mj}$ est convergente, elle ne peut converger que vers le vecteur nul.

Chaque vecteur $t_j \cdot P^{mj}$ a une composante égale à t_j, donc il est impossible que l'ensemble des $t_j \alpha_n^{mj}$ soit bornée, donc la suite ne peut pas converger vers le vecteur nul. c. q. f. d.

Nous définissons maintenant l'application $y = f(x)$ de R^* dans le corps des nombres réels

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dans les points de la suite } P^m . \\ 0 & \text{dans tous les autres points} \end{cases} \tag{19}$$

f (x) *est discontinue en* θ puisque $\lim P^m = \theta$, $f(P^m) = 1$ et $f(\theta) = \theta$.

Prenons maintenant une application $x = g(\lambda)$ qui vérifie les conditions de la définition 2. Soit λ_m une suite des nombres réels telle que $\lim \lambda_m = \lambda_0$. Il est impossible que la suite λ_m contienne une sous-suite λ_j telle que les points $g(\lambda_j)$ soient points de la suite P^m.

En effet: dans le cas contraire nous aurions une sous-suite λ_j de λ_m et une sous-suite P^{mj} de P^m, telles que $g(\lambda_j) = P^{mj}$. La suite

$$\frac{g(\lambda_j) - g(\lambda_0)}{\lambda_j - \lambda_0} = \frac{1}{\lambda_j - \lambda_0} P^{mj}$$

converge vers $g'(\lambda_0)$ et ceci est en contradiction avec le résultat que nous venons d'établir, puisque

$$\lim \left| \frac{1}{\lambda_j - \lambda_0} \right| = \infty .$$

En conséquence la fonction réelle de variable réelle $\Phi(\lambda) = f[g(\lambda)]$ a la propriété suivante: si la suite λ_m converge vers λ_0, $\Phi(\lambda_m) = 0$, pour $m > m_0$. Il y a alors un voisinage de λ_0 dans lequel $\Phi(\lambda) = 0$, et par conséquent $\Phi'(\lambda_0) = 0$.

$f(x)$ est différentiable en θ avec la définition 2 et sa différentielle est nulle, c'est a dire $f(x)$ est *différentiable et non continue.*

Nous devons alors modifier la définifion 2 et donner la définition suivante:

DÉFINITION 4. *Une application* $y = f(x)$ *est différentiable au point* x_0, *si elle vérifie les conditions de la définition 2 et si en plus elle est continue au point* x_0.

La condition de continuité est superflue si dans l'espace E, *le point* x_0 *possède un système fondamental dénombrable de voisinages.*

REMARQUE. Nous allons démontrer que *l'espace* R* *n'est pas un espace topologique au sens de* BOURBAKI. En effet: considérons l'ensemble X formé avec les points

$$(21) \qquad x_m^n = (0\,,0\,,\underset{n-1}{\cdots}\,,0\,,1\,,0\,,0\,,\underset{m-1}{\cdots}\,,0\,,n\,,0\,,0\,,\cdots)$$

où m et n prennent toutes les valeurs $1\,,2\,,3\,,\ \ldots$.

Soit

$$(22) \qquad y_n = (0\,,0\,,\underset{n-1}{0\,,\cdots}\,0\,,1\,,0\,,0\,,\cdots)$$

Il est aisé de voir que

$$(23) \qquad y_n = \lim_{m\to\infty} x_n^m$$

donc $y_n \in \overline{X}$. D'autre part $\theta = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, donc

$$(24) \qquad \theta \in \overline{\overline{X}}$$

et nous allons prouver que

$$\theta \notin \overline{X}$$

En effet: prenons une suite de points de X; si l'ensemble des indices n n'est pas borné, elle ne peut pas vérifier la condition b) de la définition 3). Si l'ensemble des indices n est borné, la suite contient une sous-suite de la forme $\{x_{n_0}^{m_i}\}$ avec n_0 fixe; tous ces points ont la composante d'ordre n_0 égal à l'unité; à cause de la condition a) de la définition 3) cette sous-suite ne peut pas converger vers θ, donc la suite ne peut pas non plus converger vers θ. c. q. f. d.

Reste donc ouverte la question suivante: soit $y = f(x)$ une application différentiable avec la définition 2. Si l'on suppose en plus que l'espace E vérifie la condition $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, pour tout ensemble X de E, sera $f(x)$ continue au point x_0?

8. Fonctions composées.

THÉORÈME 2. *Soient* $y = f(x)$, $z = h(y)$, *(où* x, y, z, *appartiennent à trois espaces* L *vectoriels,* X, Y, Z*) deux applications différentiables;* U(x) *et* V(x) *leurs différentielles respectives.*

L'application $\mathrm{z}=\mathrm{F}(\mathrm{x})=\mathrm{h}[\mathrm{f}(\mathrm{x})]$ *est différentiable et sa différentielle* $\mathrm{W}(\mathrm{x})$ *est égale à* $\mathrm{V}[\mathrm{U}(\mathrm{x})]$.

Nous supposerons $f(x)$ différentiable au point $x_0, y_0=f(x_0)$, $h(y)$ différentiable en y_0.

Les applications $f(x), h(y)$ étant continues aux points x_0, y_0 respectivement, $\mathrm{F}(x)$ est continue au point x_0. Il est aussi clair que $\mathrm{W}(x)$ est linéaire et continue.

Soit $g(\lambda)$ une application de la variable réelle λ dans X avec $g(\lambda_0)=x_0$ et différentiable dans λ_0.

Si nous considérons $y=\varphi(\lambda)=f[g(\lambda)]$, nous avons par la différentiabilité de f,

$$\varphi'(\lambda_0)=\mathrm{U}[g'(\lambda_0)]$$

et par la différentiabilité de h,

$$h[\varphi(\lambda)]-h[\varphi(\lambda_0)]=(\lambda-\lambda_0)\mathrm{V}[\varphi'(\lambda_0)]+\omega$$

avec la condition

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\omega}{\lambda-\lambda_0}=\theta \tag{25}$$

et cela équivaut à dire que

$$h[f[g(\lambda)]]-h[f[g(\lambda_0)]]=(\lambda-\lambda_0)\mathrm{W}[g'(\lambda_0)]+\omega$$

avec la condition (25)

c. q. f. d.

9. Applications avec plusieurs variables indépendantes.

Nous étudierons maintenant la différentiabilité des applications de la forme $y=f(x_1, \cdots x_n)$ où $x_i \in \mathrm{X}_i$ (espace L vectoriel) et $y \in \mathrm{Y}$ (espace L vectoriel).

Cette application peut se considérer comme une application $y=f(x)$, d'une seule variable indépendante, où x est un point de l'espace L vectoriel X, produit cartésien des espaces X_i; $\mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2\times\cdots\times\mathrm{X}_n$. *Nous dirons que* $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ *est différentiable au point* $(\mathrm{x}_1^0, \cdots, \mathrm{x}_n^0)$ *si* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *est différentiable au point* x^0 *correspondant de l'espace* X.

L'on a le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Si* $\mathrm{y}=\mathrm{f}(\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_n)$ *est différentiable au point* $(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_n)$, *les applications* $\mathrm{y}=\mathrm{f}_i(\mathrm{x}_i)=\mathrm{f}(\mathrm{a}_1, \cdots, \mathrm{a}_{i-1}, \mathrm{x}_i, \mathrm{a}_{i+1}, \cdots \mathrm{a}_n)$ *sont différentiables aux points* $\mathrm{x}_i=\mathrm{a}_i$. En effet:

Soit $x_i = h(\lambda)$ une application des nombres réels dans X_i, telle que $h(\lambda_0) = a_i$, et différentiable pour $\lambda = \lambda_0$. Nous pouvons maintenant définir l'application

$$x = g(\lambda) = (a_1, \cdots a_{i-i}, h(\lambda), a_{i+1}, \cdots a_n)$$

avec valeurs dans l'espace produit. Evidemment l'on a $g(\lambda_0) = (a_1, \cdots a_n)$. En plus nous avons, ayant compte de la différentiabilité de $h(\lambda)$

$$\begin{aligned} g(\lambda) - g(\lambda_0) &= (0, \cdots, h(\lambda) - h(\lambda_0), \cdots 0) = \\ &= (0, \cdot \cdot, h'(\lambda_0), \cdots) + (0, \cdots, \omega_i(\lambda), \cdots 0) \end{aligned}$$

avec

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\omega_i(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} = \theta$$

et alors, l'on a aussi

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \left(0, \cdot \cdot, \frac{\omega_i(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}, \cdots 0\right) = \theta$$

et l'on déduit que $g(\lambda)$ est différentiable pour $\lambda = \lambda_0$ avec $g'(\lambda_0) = (0, \cdots h'(\lambda_0), \cdots 0)$.

Comme $f(x)$ est différentiable nous avons

$$\frac{f[g(\lambda)] - f[g(\lambda_0)]}{\lambda - \lambda_0} = U[g'_{\lambda_0}] + \Omega(\lambda) \tag{26}$$

où $U(x)$ est la différentielle de $f(x)$ au point $(a_1, \cdot \cdot, a_n)$.

Nous pouvons écrire (26) sous la forme:

$$\frac{f_i[h(\lambda)] - f_i[h(\lambda_0)]}{\lambda - \lambda_0} = U_i[g'(\lambda_0)] + \Omega(\lambda) \tag{27}$$

où

$$U_i(x_i) = U(0, \cdots x_i, \cdots 0) \tag{28}$$

et

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \Omega(\lambda) = \theta$$

La relation (27) nous prouvera le théorème si l'on démontre que $U_i(x_i)$ est linéaire et continue et cela se déduit aisément du fait que $U(x)$ a aussi ces deux propriétés.

Définition 5. *Nous appellerons différentielles partielles de* $y = f(x_1, \cdots x_n)$ *les différentielles des applications* $y = f_i(x_i)$.

De (28) l'on déduit:

$$U(x_1, \cdots x_n) = U_1(x_1) + \cdots + U_n(x_n).$$

c'est à dire que l'on a le résultat suivant: *la différentielle d'une application de plusieurs variables est égale à la somme de toutes ses différentielles partielles.*

10. La formule $dy = U(dx)$.

Supposons $f(x)$ différentiable dans les points d'un certain ensemble. En chaque point nous avons une différentielle, application linéaire et continue. Pour éviter des confusions entre l'argument de la fonction et celui de la différentielle nous pouvons employer la notation $U(\Delta x)$ pour la différentielle. Cette fonction de l'accroisement dépend évidement de la fonction et du point; par analogie avec l'analyse classique nous pouvons l'appeller $df(x)$, où avec une notation plus précise $\delta^x_{\Delta x} f(x)$.

$$U(\Delta x) = df(x) = \delta^x_{\Delta x} f(x). \tag{29}$$

Si nous considérons l'application identique $f(x) = x$, nous avons toujours $dx = U(\Delta x) = \Delta x$, et par conséquent (29) peut s'écrire:

$$dy = U(dx). \tag{30}$$

Supposons maintenant que x soit définie par l'intérmediaire d'une application $x = g(t)$ différentiable et soit $V(\Delta t)$ sa différentielle. Le théorème 2 nous dit que:

$$dy = \delta^t_{\Delta t} f[g(t)] = U[V(\Delta t)] = U[\delta^t_{\Delta t} g(t)].$$

Nous avons donc le résultat suivant: *La formule* (30) *a lieu quand la variable* x *est définie par l'intermédiaire d'une application* x = g (t).

Nous voyons donc que dans cette théorie est conservé l'avantage de la notation différentielle de l'analyse classique de ne pas avoir à préciser quelle est la variable que l'on considère comme indépendante.

11. Applications composées de plusieurs variables.

Considérons maintenant une application $y = f(x_1, \cdots x_n)$ où chaque variable x_1 est définie par l'intermediaire d'une a pp lica tion $x_i = \varphi_i(t_1, \cdots t_m)$. Nous supposons $f(x_1, \cdots, x_n)$ différentiable au point $(x_1^0, \cdots x_n^0)$ et $\varphi_i(t_1, \cdots t_m)$ différentiable au point $(t_1^0, \cdots t_m^0)$ avec $x_i^0 = \varphi_i(t_i^0, \cdots, t_m^0)$. Nous allons maintenat étudier la différentielle de

$$y = \Psi(t_1, \cdots t_m) = f[\varphi_1(t_1, \cdots t_m), \cdots, \varphi_n(t_1, \cdots t_m)]$$

au point $(t_1^0, \cdots, t_m^0)$.

Soient $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ et $T = T_1 \times \cdots \times T_m$ les espaces produits cartésiens des variables $x_1, \cdots, x_n$ et $t_1, \cdots t_m$ respectivement.

Soit $t = g(\lambda), \lambda$ réel, différentiable pour $\lambda = \lambda_0$ et avec $t^0 = g(\lambda_0)$, et soit $\Phi_i(\lambda) = \varphi_i[g(\lambda)]$.

Si V_i est la différentielle de $\varphi_i(t)$ nous avons:

(31) $$\Phi'_i(\lambda_0) = V_i[g'(\lambda_0)].$$

Considérons maintenant l'application

(32) $$x = h(\lambda) = (\Phi_1(\lambda), \cdots \Phi_n(\lambda)).$$

Nous avons:

$$\Phi_i(\lambda_0) = \varphi_i[g(\lambda_0)] = \varphi_i(t^0) = x_i^0.$$

donc $h(\lambda_0) = x^0$.

D'autre part en ayant compte de la différentiabilité de $\Phi_i(\lambda)$

$$\frac{h(\lambda) - h(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \left(\frac{\Phi_1(\lambda) - \Phi_1(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}, \cdots, \frac{\Phi_n(\lambda) - \Phi_n(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right) =$$
$$= (\Phi'_1(\lambda_0), \cdots \Phi'_n(\lambda_0)) + (w_1(\lambda), \cdots w_n(\lambda))$$

avec $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \dfrac{w_i(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} = 0$. En conséquence nous avons, ayant compte de (31)

(33) $$h'(\lambda_0) = (V_1[g'(\lambda_0)], \cdots V_n[g'(\lambda_0)]).$$

Soit maintenant $y = \sigma(\lambda) = f[h(\lambda)]$. Par la différentiabilité de f, si U est la différentielle

(34) $$\sigma'(\lambda_0) = U[h'(\lambda_0)].$$

Et l'on a aussi

(35) $$\sigma(\lambda) = \Psi[g(\lambda)].$$

puisque

$$\sigma(\lambda)=f[\Phi_1(\lambda), \cdots \Phi_n(\lambda)]=f[\varphi_1[g(\lambda)], \cdots \varphi_n[g(\lambda)]]=\Psi(g(\lambda)].$$

Considérons maintenant l'application

$$W(t)=U[V_1(t), \cdots V_n(t)]. \tag{36}$$

Il est aisé de voir que $W(t)$ est une application linéaire et continue. D'autre part nous avons:

$$\sigma'(\lambda_0)=U[h'(\lambda_0)]=U[V_1[g'(\lambda_0)], \cdots V_n[g'(\lambda_0)]]=\sigma'(\lambda_0)=W[g'(\lambda_0)].$$

En conséquence $y=\Psi(t)$ est différentiable au point t_0 et sa différentielle est W, c'est à dire que *nous avons généralisé le théorème* 2 *pour les applications de plusieurs variables.*

Si nous prenons maintenant un acroissement $\Delta t=(\Delta t_1, \cdots \cdots \Delta t_m)$, nous avons

$$dy=\delta^{t_0}_{\Delta t}f[\varphi_1(t), \cdots \varphi_n(t)]=W(\Delta t). \tag{37}$$

$$dx_i=\delta^{t_0}_{\Delta t}\varphi_i(t)=V_i(\Delta t). \tag{38}$$

Considérons maintenant l'application

$$f_i(x_i)=f(x_1^0 \cdots x_i \cdots x_n^0) \tag{39}$$

et soit U_i sa différentielle. Comme $x_i=\varphi_i(t)$, nous pouvons appliquer les formules (29) et (30), et nous avons:

$$dy=U_1[V_1(\Delta t)]+\cdots+U_n[V_n(\Delta t)]=U_1(dx_1)+\cdots U_n(dx_n)=$$
$$=df_1(x_1)+\cdots+df_n(x_n).$$

Nous avons donc prouvé le théorème suivant:

THÉORÈME 4. *La différentielle d'une application de plusieurs variables est égale à la somme de toutes ses différentielles partielles, tant dans le cas où les variables sont indépendantes que dans le cas où ·lles dépendent d'autres variables.*

12 Comparaison avec d'autres définitions de la différentielle.

Le travail de M. KY FAN développe la théorie de la différentielle pour les espaces normés, et il donne aussi une extension de sa théorie aux expaces distanciés affines, au sens de M. FRÉCHET, mais, comme il le dit lui même, les propriétés les plus importantes ne subsistent plus.

M. Balanzat (4) a modifié la définition de Ky Fan et avec cette modification les propriétés subsistent. Dans le cas des espaces normés les définitions de Ky Fan et Balanzat coïncident.

Nos définitions 1 et 2 s'appliquent aux espaces distanciés affines puisque ces espaces sont vectoriels et métrisables. Il convient en plus de modifier légèrement la définition de Balanzat et dire que $g(\lambda)$ est différentiable au point λ_0 si

$$g(\lambda)-g(\lambda_0)=(\lambda-\lambda_0)\,g'(\lambda_0)+\omega$$
$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} d\left[\frac{\omega}{\lambda-\lambda_0},\theta\right]=0\,.$$

Nous allons maintenant comparer notre définition avec la généralisation donnée par M. Fréchet [8] de la définition de différentielle au sens de Stolz pour les espaces normés. Les espaces considerés par M. Fréchet sont groupes topologiques abéliens.

Nous allons montrer que: *si la topologie de ces groupes peut être exprimée par l'intermédiaire des suites convergentes, et sont en plus des espaces vectoriels sur le corps des nombres réels, toute application différentiable au sens de* M. Fréchet *l'est aussi dans notre sens.*

La définition de M. Fréchet est la suivante: $y=f(x)$ est différentiable au point x_0, s'il existe une application linéaire et continue u, telle que

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=u(\Delta x)+\omega(\Delta x) \tag{40}$$

où ω vérifie la conditión suivante: il existe un voisinage W de θ en X tel qu'à tout voisinage V de θ en Y est associé un voisinage U de θ en X, pour lequel, quel que soit l'entier positif n, les relations simultanées

$$\begin{cases}\alpha\in U\\ n\alpha\in W\end{cases}\qquad \text{entraînent } n\cdot\omega(\alpha)\in V \tag{41}$$

Dans le cas particulier d'une application $x=g(\lambda)$, λ réel, les conditions (41) prennent la forme

$$\begin{cases}|\Delta\lambda|<\varepsilon\\ |n\,\Delta\lambda|<R\end{cases}\qquad \text{entraînent } n\cdot\omega\in V \tag{42}$$

---

[8] M. Fréchet: *La notion de différentielle sur un groupe abélien* (Portugaliae Mathematica, vol. 7, 1948).

Dans ce cas notre définition s'exprime aussi par la relation (40) mais il faut remplacer (42) par la condition

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{\omega(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} = \theta \tag{43}$$

et nous allons prouver que dans ce cas particulier les deux définitions sont équivalentes.

Suposons (42) vérifiée. Soit V_1 un voisinage quelconque d'un système fondamental de voisinages de l'origine en X. Nous pouvons alors choisir un autre voisinage V de la même base tel que

$$V \subset n \cdot \Delta\lambda \cdot V_1$$

et alors, l'on a:

$$n \cdot \omega(\Delta\lambda) \in V \subset n \cdot \Delta\lambda \cdot V_1$$
$$\omega(\Delta\lambda) \in \Delta\lambda \cdot V_1$$

et par conséquent

$$\frac{\omega(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \in V_1$$

Suposons maintenant (43) vérifiée. Alors si V_1 est un voisinage de θ en X, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour $|\Delta\lambda| < \varepsilon$

$$\frac{\omega(\Delta\lambda)}{\Delta\lambda} \in V_1$$

et alors si nous prenons V_1 de façon qu'il vérifie $n \cdot |\Delta\lambda| V_1 \subset V$, pour V quelconque donné, l'on a $n \cdot \omega(\Delta\lambda) \in V$, quand $|\Delta\lambda| < \varepsilon$; $|n\Delta\lambda| < R = 1$ ce qui prouve que (42) est vérifiée.

Ayant démontré l'équivalence pour les applications de variable réelle, mous considérerons maintenant une application $y = f(x)$ différentiable au sens de M. Fréchet.

Dans son mémoire M. Fréchet prouve le théorème de la différentiabilité des applications composées. En l'appliquant au cas $x = g(\lambda), y = f(x), g(\lambda)$ différentiable quelconque, on obtient tout de suite la différentiabilité dans notre sens.

La réciproque est fausse, même dans le cas des applications entre deux espaces bornés; M. Fréchet (2) a donné un exemple d'une application différentiable au sens d'HADAMARD qui n'est pas différentiable au sens de STOLZ.

13. Reconaissance.

Je veux bien exprimer ma reconnaissance à Mr. le Professeur M. BALANZAT pour m'avoir donné le sujet de cet travail et pour les conseils qui m'a prodigué pendant la realization de cette recherche.

Note ajoutée en épreuves

Nous avons reçu de M. MANUEL BALANZAT une comunication à propos de la continuité des applications différentiables qui ajoute un complément aux résultats que nous avons établi. Voici les résultats de M. BALANZAT:

Soit X un espace L vectoriel qui possède la propriété suivante:

a) Pour toute suite x_n convergente vers le vecteur nul, il existe une sous-suite x_{n_m} et une suite λ_m de nombres réels, avec $\lim \lambda_m = \infty$, telles que la suite $y_m = \lambda_m \cdot x_{n_m}$ converge aussi vers le vecteur nul.

Alors, quelque soit l'espace L vectoriel Y, toute application $y = f(x)$ de X dans Y différentiable au point $x = \theta$, est continue dans ce point.

Réciproquement, si X ne vérifie pas la propriété *a*), quelque soit l'espace vectoriel Y, il est possible de définir une application $y = f(x)$ de X dans Y, différentiable au point $x = \theta$ et discontinue dans ce point.

Parmi les espaces qui vérifient la propriété *a*) se trouvent:

1) Les espaces L vectoriels dont l'origine possède un système fondamental dénombrale de voisinages.

2) Les espaces L vectoriels qui sont en plus des espaces topologiques au sens de BOURBAKI.

On peut obtenir des exemples des espaces qui ne rentrent pas dans aucune des deux catégories antérieures et qui vérifient la propriété *a*), dans les espaces de la théorie des distributions (en particulier l'espace D) si l'on définit les topologies par l'intermédiaire des suites convergentes.

L'espace Q de M. FRÉCHET, c'est-à-dire, l'espace des fonctions réelles d'une variable réelle, où les suites convergentes sont définies par la convergence en chaque point, est un exemple d'espace L vectoriel qui ne vérifie pas la propriéte *a*).